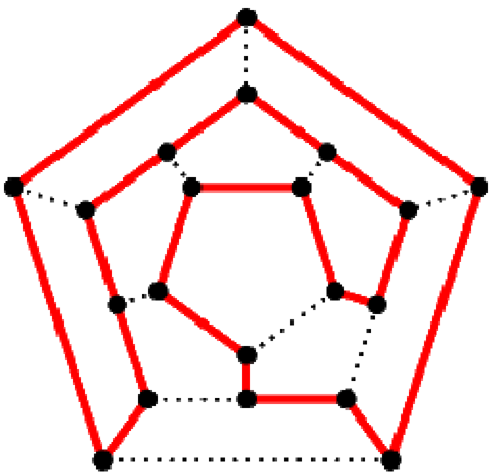


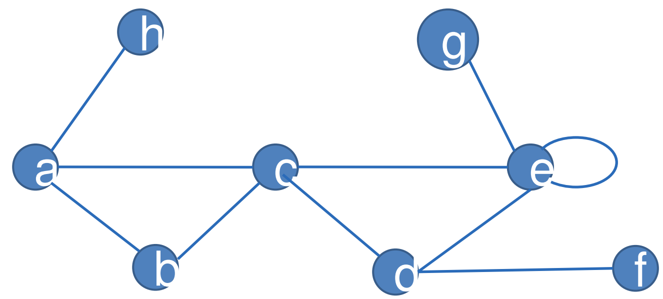
GRAFOS PARTE 2

CAMINOS Y CIRCUITOS

- En un grafo se puede recorrer la información de diferentes maneras para llegar de un punto a otro.
- Todo recorrido es un camino y la longitud del camino o del circuito es el número de vértices que se tocan menos 1. Los vértices no se repiten.

Camino de longitud n	Es una sucesión de lados que van de un vértice x a un vértice w (los lados son distintos).
Camino simple de longitud n	Es de la forma v0, v1, v2, .., vn donde vo=v y vn= w y v0, v1, v2, …, vn son distintos entre si.
Circuito (Ciclo)	Es un camino del vértice w al vértice w, esto es, un camino que regresa al mismo vértice de donde salió.
Circuito simple de longitud n	Es aquel camino del vértice w al vértice w que solamente tiene un ciclo en la ruta que sigue y distintos entre si.
Camino simple de longitud n	Es una sucesión de aristas que van de un vértice x a un vértice w, en donde las aristas que componen dicho camino son distintos e iguales a n, Esto significa que no se puede pasar dos veces por una misma arista.

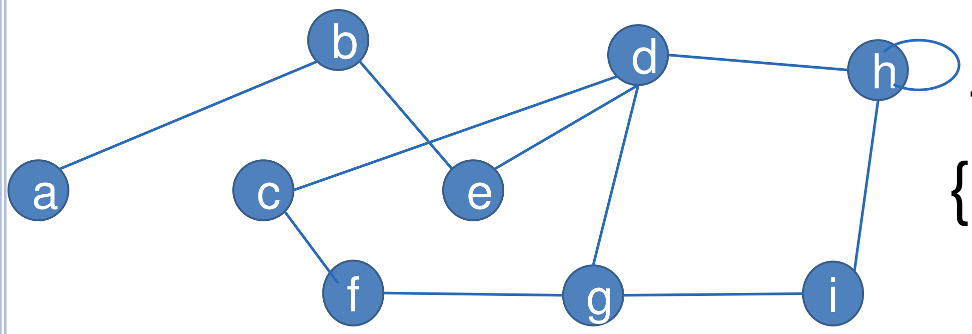
Ejemplo: Dado el grafo



Recorrido	Camino	Camino simple de longitud n	Circuito	Circuito simple de longitud n
{a,b,c,e,d,f}	✓	L = 5		
{a,h,a,b,c}	X			
{c,e,e,d,c,b}	✓			
{d,e,g,e,e,d}	X			
{e,e}	✓			
{h,a,b,c,a,h}	X			
{c,d,e,c}	✓	L=3	✓	L = 3
{a,b,c,d,e,c}	✓			
{a,h,a}	X			
{b,a,c,d,f}	✓	L = 4		

CAMINO DE EULER

- Es aquel camino que recorre todos los vértices pasando por todos los arcos solamente una vez



Caminos de Euler:

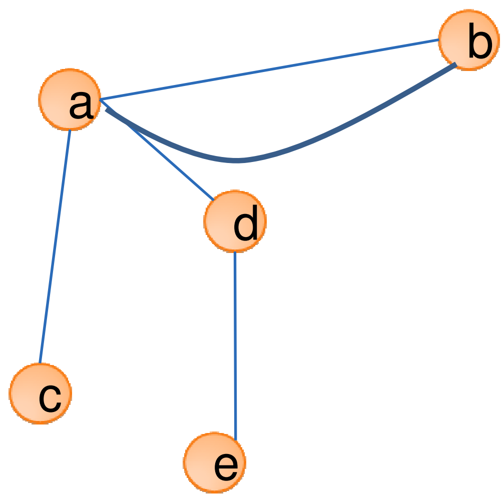
{a,b,e,d,c,f,g,d,h,h,i,g}

{g,i,h,h,d,g,f,c,d,e,b,a}

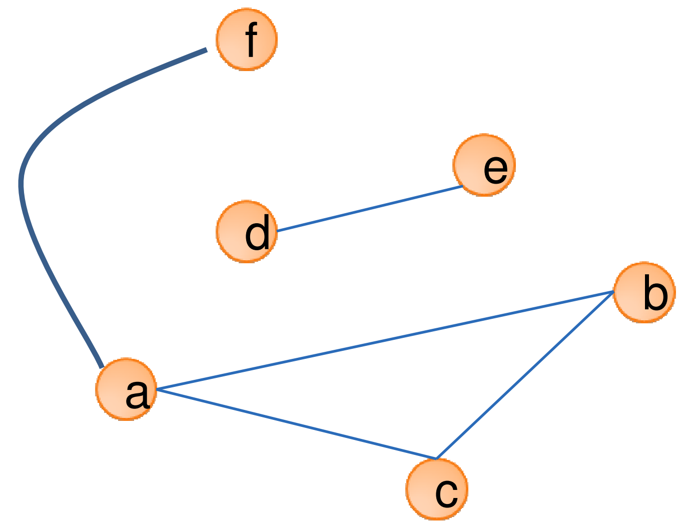
- Un camino de Euler siempre inicia y termina en un vértice de grado impar.
- Si un grafo tiene mas de dos vértices de grado impar no puede tener caminos de Euler.

GRAFO CONEXO O CONECTADO

- Es aquél en el que para cualquier par de vértices w, x distintos entre sí, existe un trayecto para ir de w a x.



Grafo conexo



Grafo no conexo

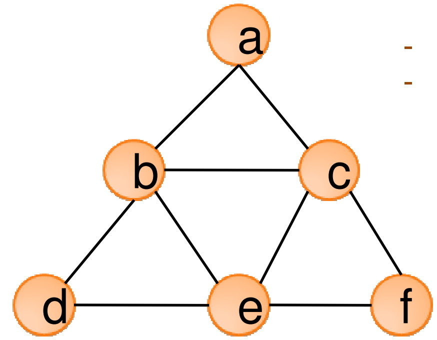
CIRCUITO DE EULER

- Es aquel ciclo que recorre todos los vértices pasando por todos los lados solamente una vez.
- Un grafo tiene un camino Euleriano pero no un circuito Euler si y solo si tiene exactamente 2 vértices de grado impar.
- Un multigrafo conexo tiene un circuito Euleriano si y solo si cada vértice tiene grado par.

Algoritmo de Fleury para un circuito de Euler

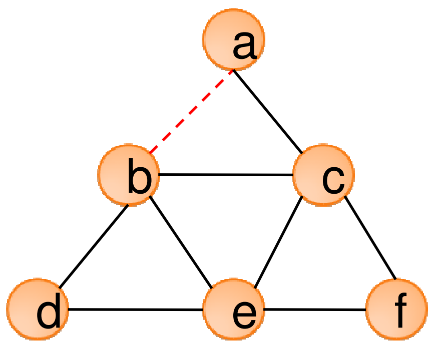
1. Verificar que es conexo con todos los vértices de grado par
2. Seleccionar un vértice arbitrario
3. Seleccionar una arista a partir del vértice actual que no sea puente (es decir que no desconecte el grafo), a menos que no haya otra alternativa. Arista puente es aquella que si se elimina, el grafo ya no es conexo.
4. Desconectar los vértices que están unidos por la arista seleccionada
5. Si todos los vértices ya están desconectados, ya se tiene el circuito de Euler. De otra forma continuar con el paso 3

Ejemplo de Circuito de Euler



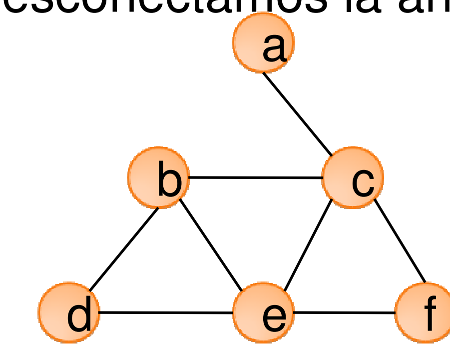
- Grafo conexo,
- Vértices con grado par

- Iniciamos el recorrido en el nodo a y podemos seleccionar la arista (a,b) o (a,c) ya que no son puentes, consideremos (a,b)

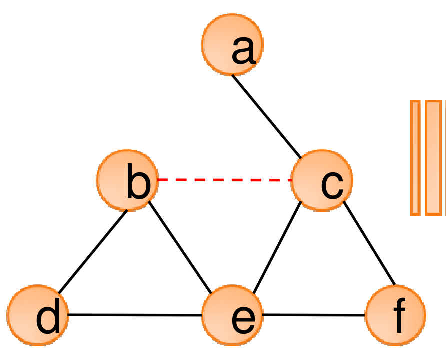


Circuito (a,b)

- Desconectamos la arista

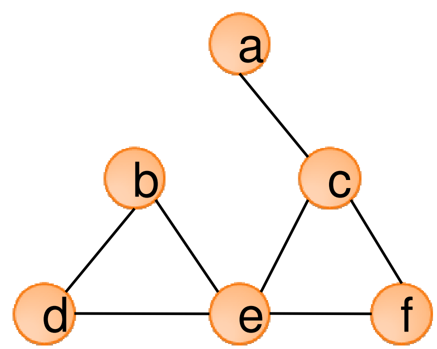


- Ahora podemos tomar (b,c), (b,d) o (b,e), seleccionamos (b,c)

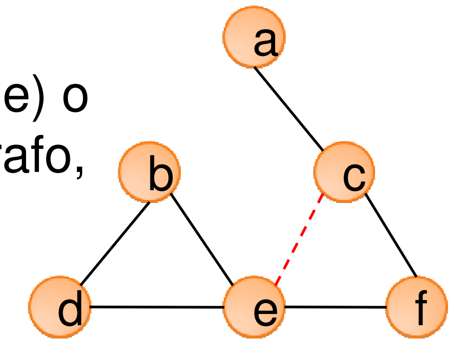


Circuito (a,b,c)

- Desconectamos la arista

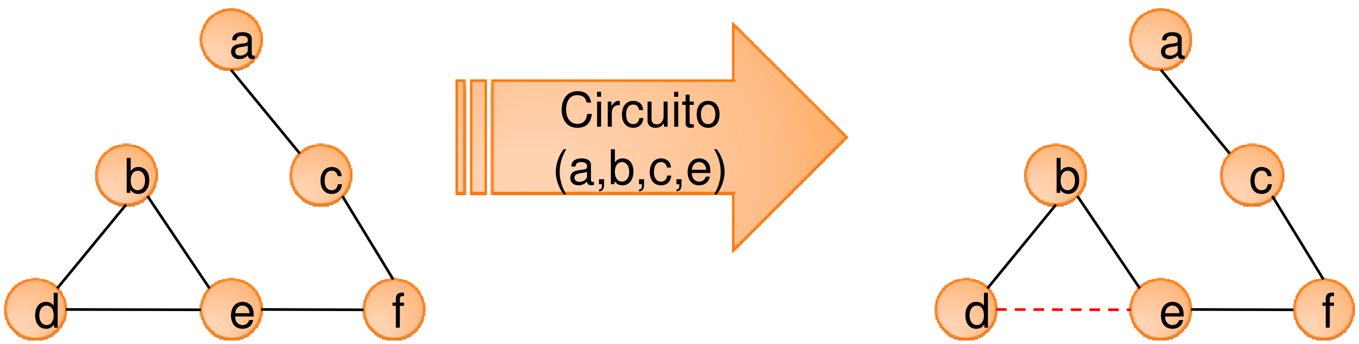


- Del vértice actual c se puede seleccionar (c,e) o (c,f) y no (c,a) ya que se desconectaría el grafo, así seleccionamos (c,e)



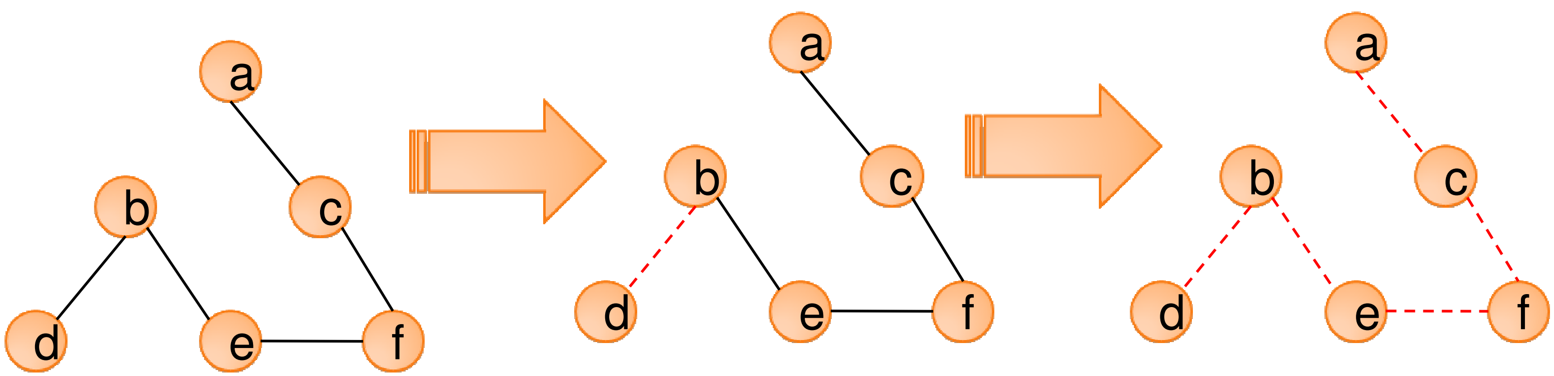
  - Eliminando la arista se tiene

- Seleccionamos (e,d)



- Circuito (a,b,c,e,d)

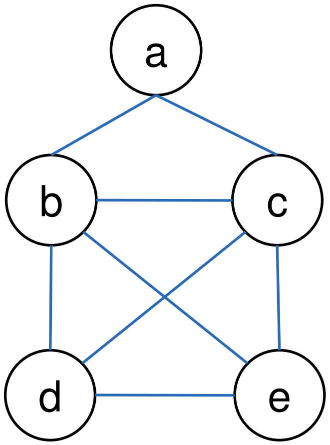
- Ahora solo quedan lados puente por lo que habrá que seleccionarlos

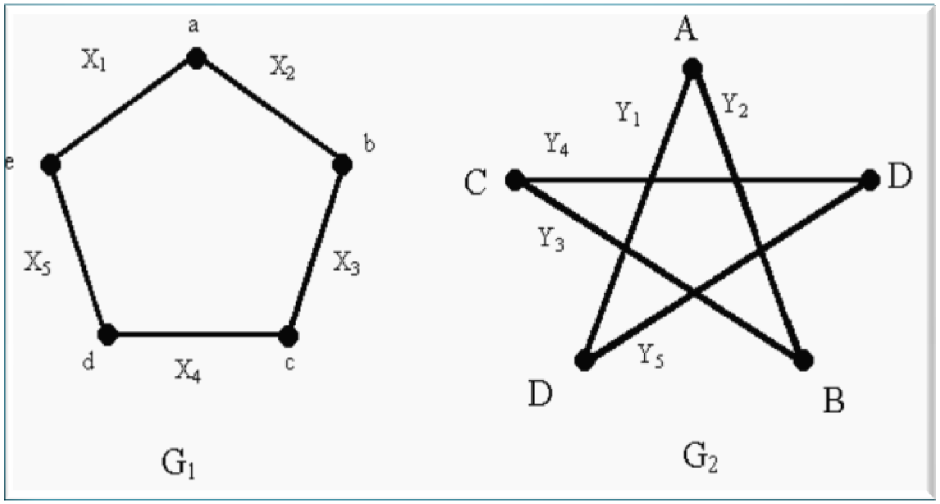


Circuito de Euler (a,b,c,e,d,b,e,f,c,a)

EJERCICIO

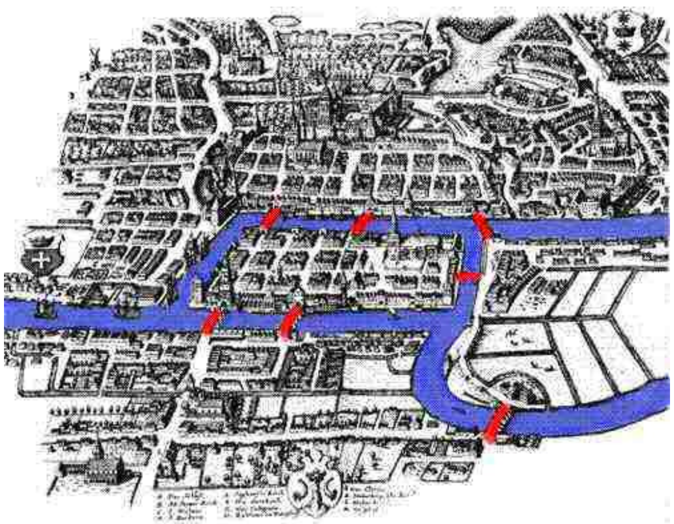
- Determina si es posible obtener un camino de Euler y un circuito de Euler

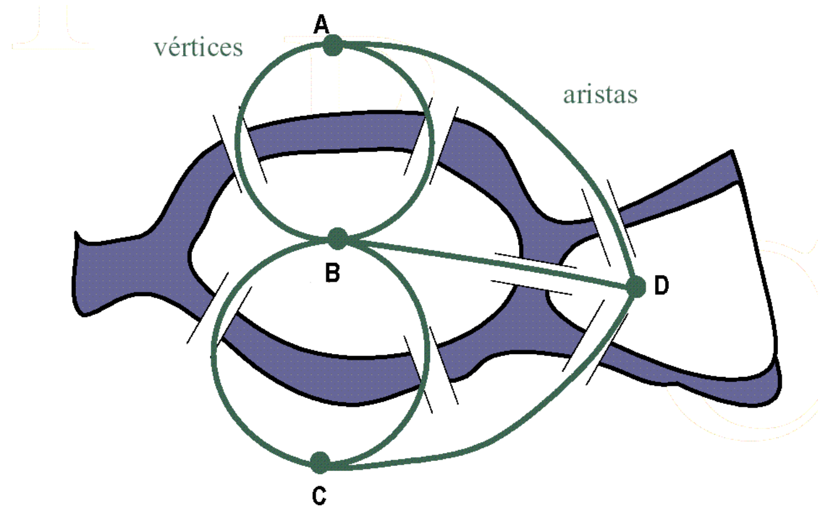




Recorrido Euler

- Ciudad de Könisberg, en XVIII:

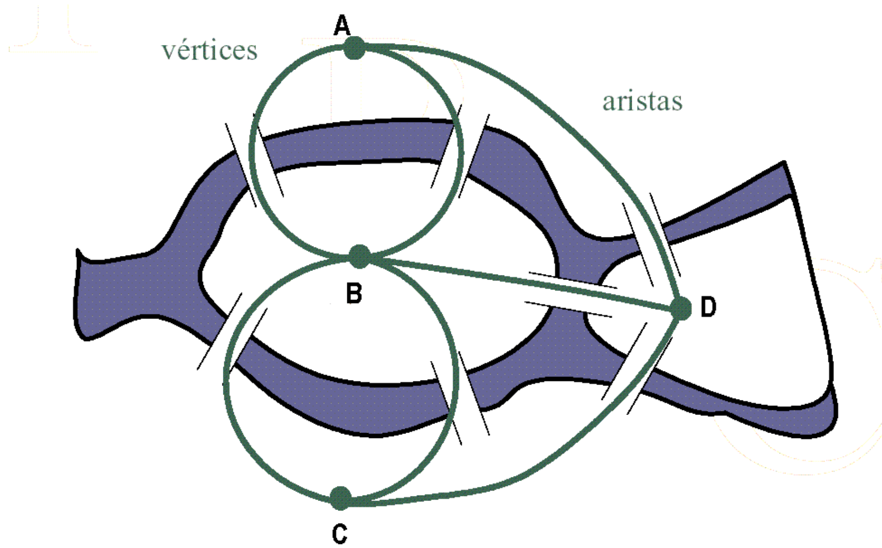


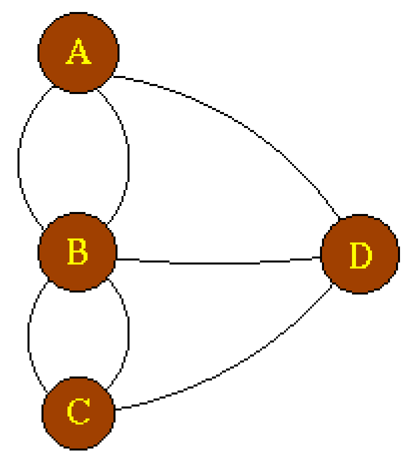


- Pregunta: ¿sería posible dar un paseo pasando por cada uno de los siete puentes, sin repetir ninguno, comenzando y acabando en el mismo punto?

Ejercicio

- Representación propuesta por Leonard Euler en 1736:

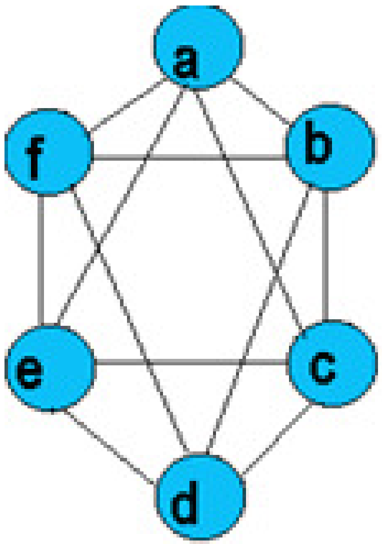


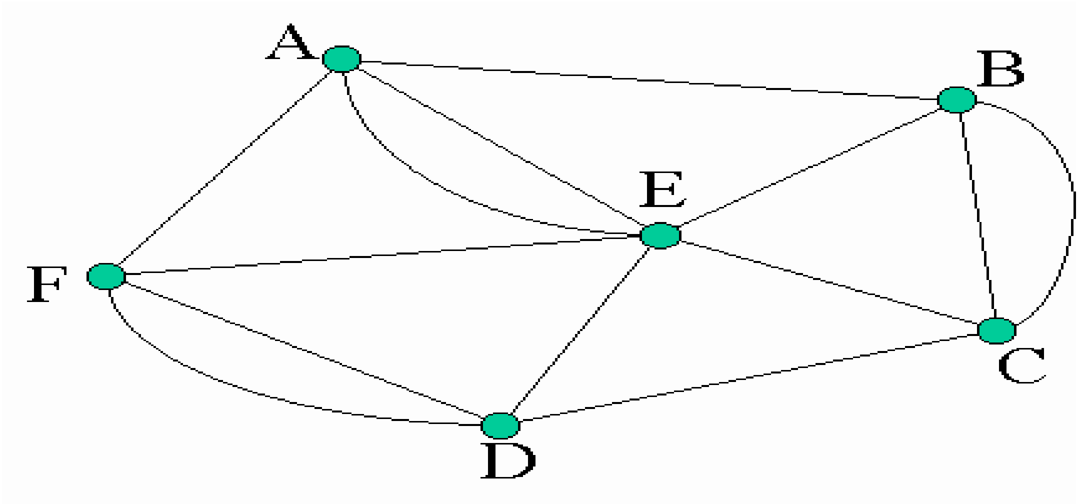


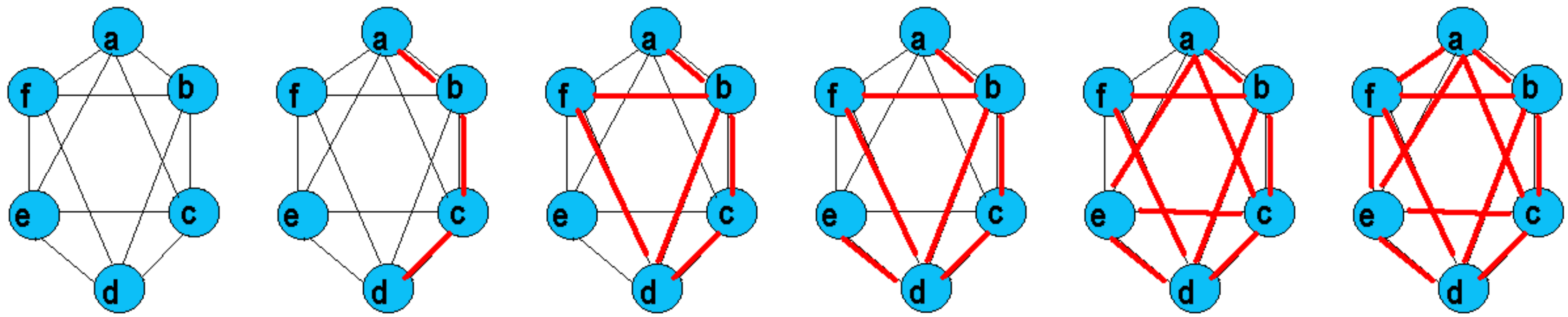
- ¿Existe un circuito que pase por todas las aristas una sola vez?

Ejercicio

- ¿Los grafos tienen un ciclo euleriano?

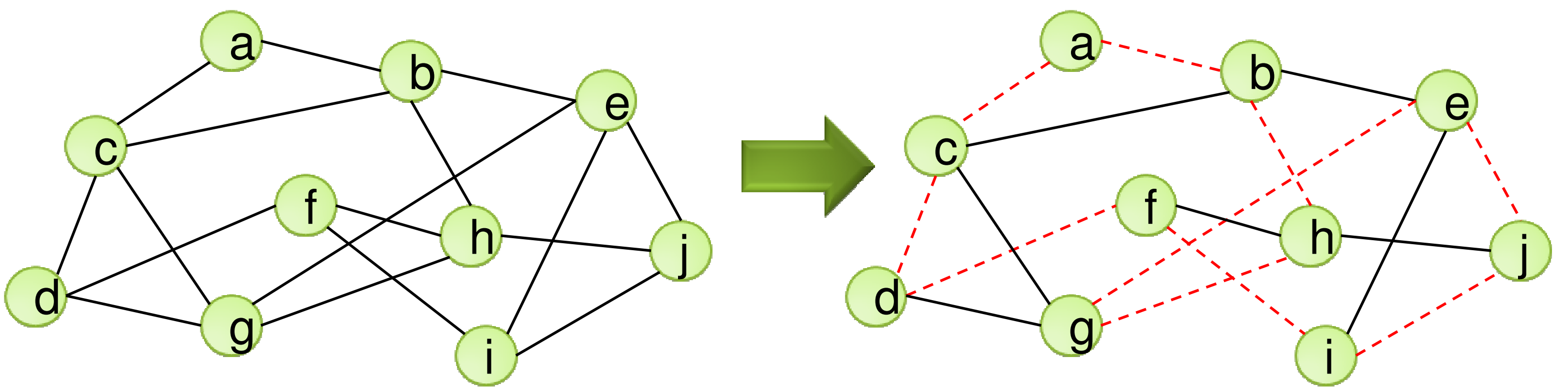






CIRCUITO HAMILTONIANO

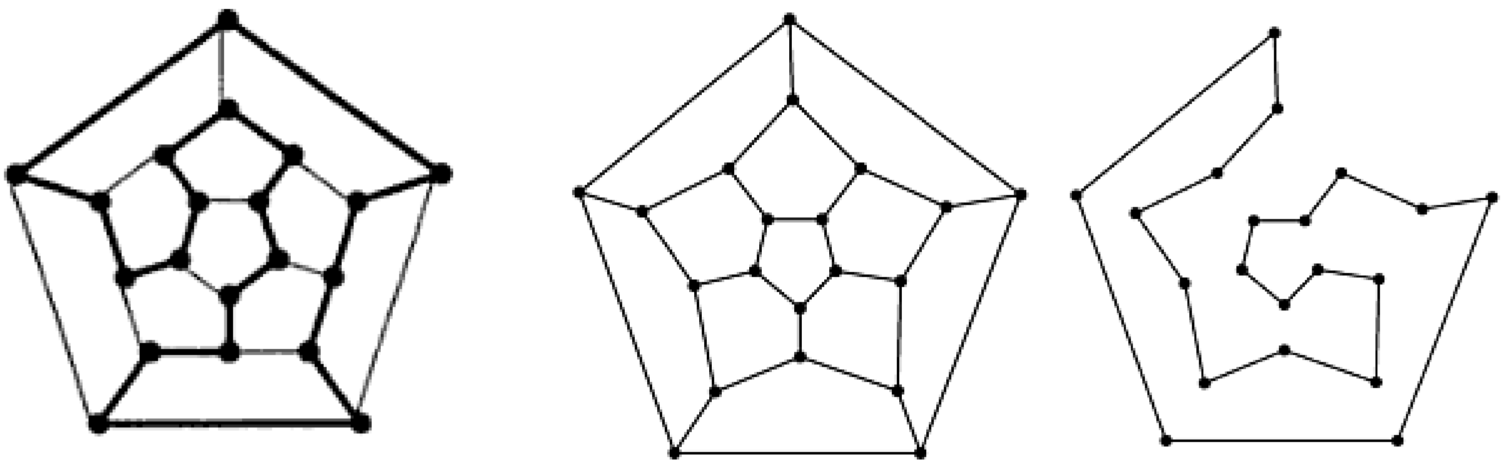
- Se trata de un problema similar al del circuito de Euler, con la diferencia que en lugar de pasar por todos los lados del grafo solamente una vez, en el circuito de Hamilton se pasa por cada vértice solamente una vez.



Circuito de Hamilton
{a,b,h,g,e,j,i,f,d,c,a}

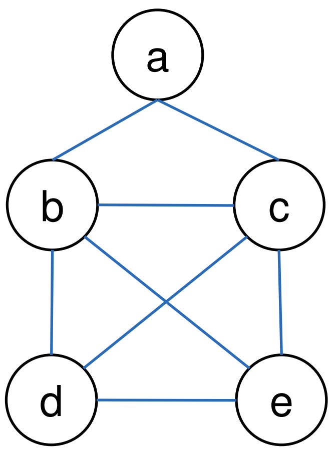
CIRCUITO HAMILTONIANO Y CAMINO HAMILTONIANO

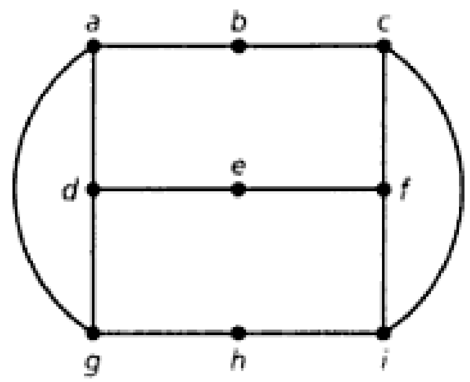
- Si G=(V,E) es un grafo o multigrafo con |V| >= 3, decimos que G tiene un ciclo hamiltoniano si existe un ciclo en G que contenga cada vértice de V. Un camino hamiltoniano es un camino simple (y no un ciclo) de G que contiene todos los vértices.
- Dado un grafo con un ciclo hamiltoniano, la eliminación de cualquier arista en el ciclo produce un camino hamiltoniano. Sin embargo, es posible que un grafo tenga un camino hamiltoniano sin que tenga un ciclo hamiltoniano.



EJERCICIO

- Determina si el grafo tiene un camino y un circuito hamiltoniano.



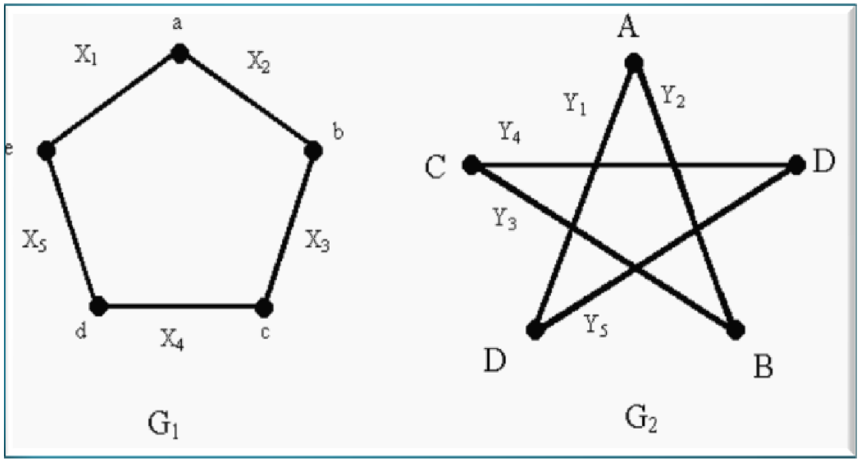


Camino hamiltoniano: a,b,c,f,e,d,g,h,i

Circuito hamiltoniano:
b,c,f,i,h,g,d,e,f –> no tiene

ISOMORFISMO

Se dice que dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos cuando teniendo apariencia diferente son iguales, porque coinciden en:

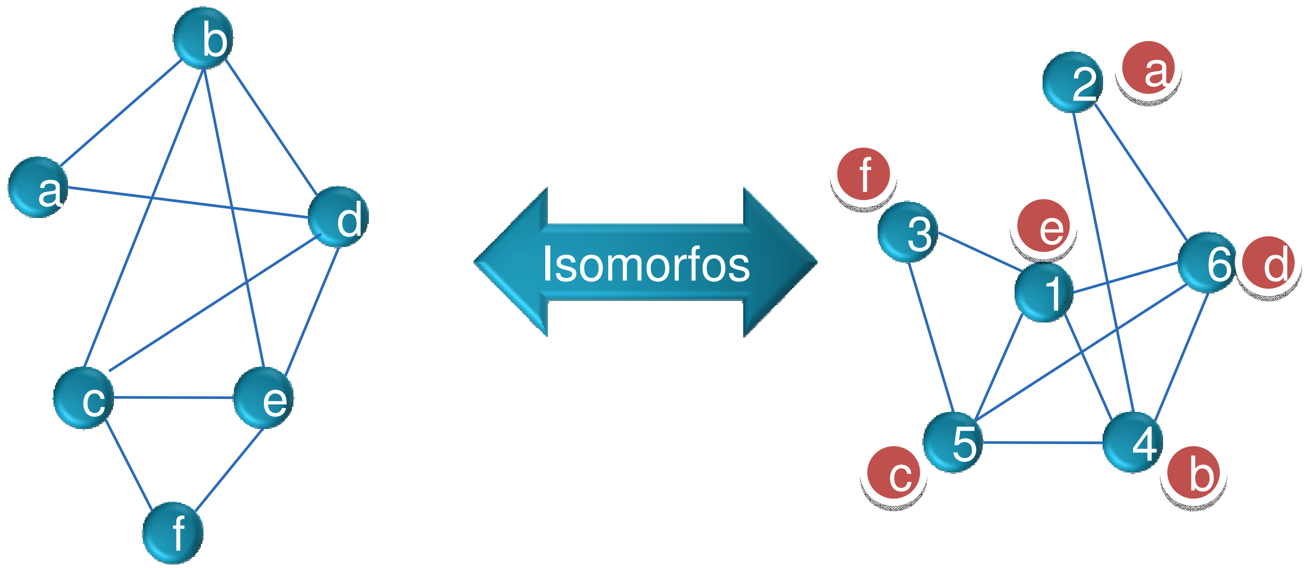


- El número de aristas
- El número de vértices
- El conjunto de grados
- Ser o no conexos
- El número de circuitos de longitud n
- Tener o no circuito de Euler

Definición: Dos grafos G=(V,A), G'=(V',A') son isomorfos si existe una función biyectiva $f:V \rightarrow V'$ tal que $\{a,b\} \in A \leftrightarrow \{f(a),f(b)\} \in A'$

EJEMPLO: DETERMINAR SI LOS GRAFOS G_1 Y G_2 SON ISOMORFOS

- Aplicando una función biyectiva a cada vértice de G_1 se mapea en G_2 y una función biyectiva a cada vértice de G_2 se mapea en G_1.



f(a)=2

f(b)=4

f(c)=5

f(e)=1

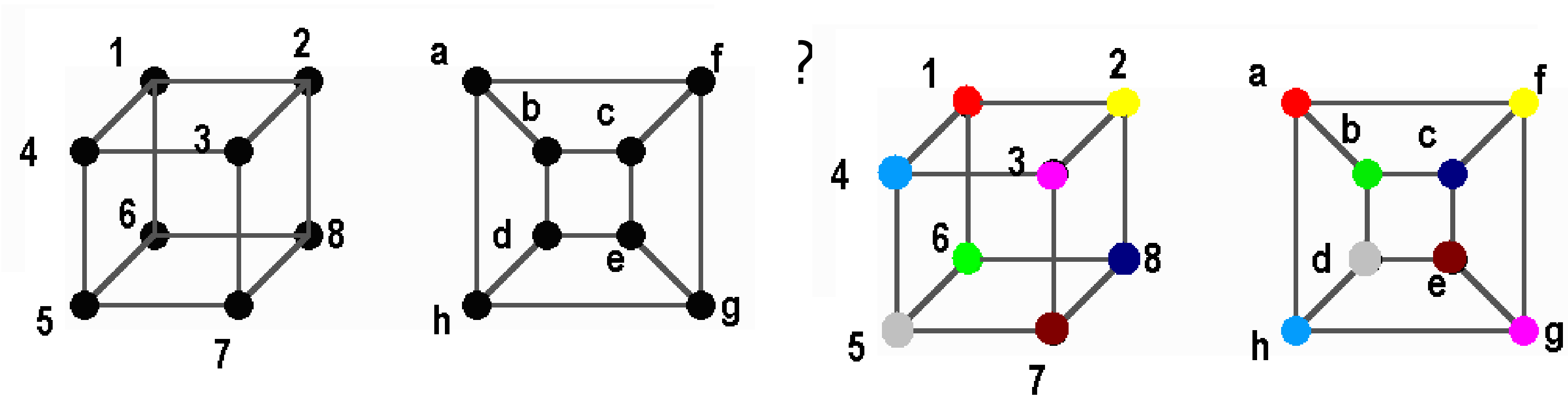
f(f)=3

f(d)=6

TABLA COMPARATIVA DE G_1 Y G_2

Propiedad	G1	G2	Observación
Número de vértices	6	6	
Número de aristas	10	10	
Grados	2,4,4,4,4,2	4,2,2,4,4,4	Coinciden en el mismo número de vértices y de grados 2 y 4.
Conexo	Si	Si	para cualquier par de vértices se puede encontrar un camino
Camino de Euler	No	No	Todos los vértices son de grado par
Circuito de Euler	Si	Si	Todos los vértices tienen grado par
Circuitos de longitud n (en este caso de longitud 3)	6 a,b,d,a b,e,c,b b,d,c,b b,d,e,b c,d,e,c c,e,f,c	6 1,3,5,1 1,6,4,1 1,4,5,1 1,5,6,1 2,4,6,2 4,5,6,4	En lugar de tener longitud 3, se puede ver cuántos circuitos tienen de longitud 4. Pero en cualquier caso deben de coincidir

Ejercicio



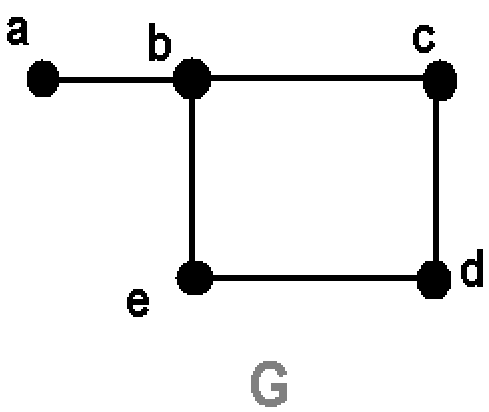
Demostración: Construimos f como se indica al lado de la figura.

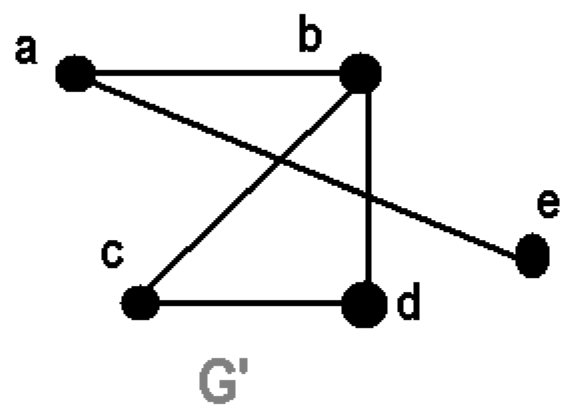
Se tiene que:

{1,2}→f→{a,f}	{6,8}→f→{b,c}	{1,6}→f→{a,b}	f(1) = a f(2) = f f(6) = b
{2,8}→f→{f,c}	{4,3}→f→{h,g}	{1,4}→f→{a,h}	f(4) = h f(5) = d f(3) = g
{2,3}→f→{f,g}	{5,7}→f→{d,e}	{4,5}→f→{h,d}	f(7) = e f(8) = c
{3,7}→f→{g,e}	{6,5}→f→{b,d}	{8,7}→f→{c,e}	

Ejercicio

- ¿Son isomorfos estos dos grafos?

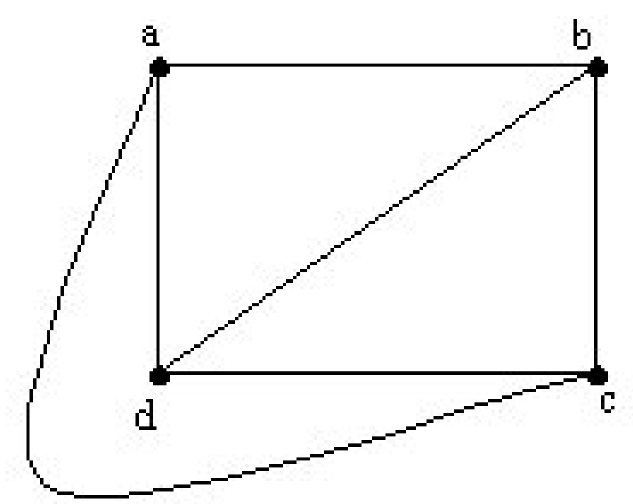


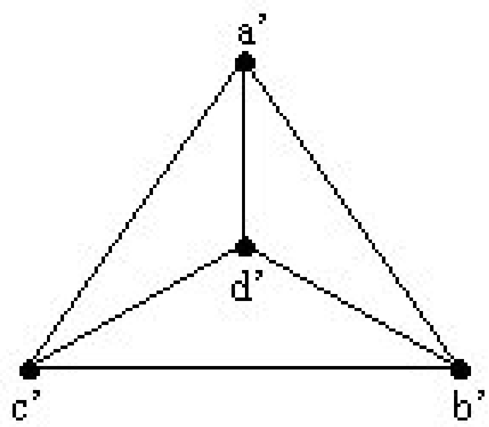


No, G' tiene un ciclo de longitud 3 (b,d,c,b) y G no tiene ninguno de longitud 3

Ejercicio

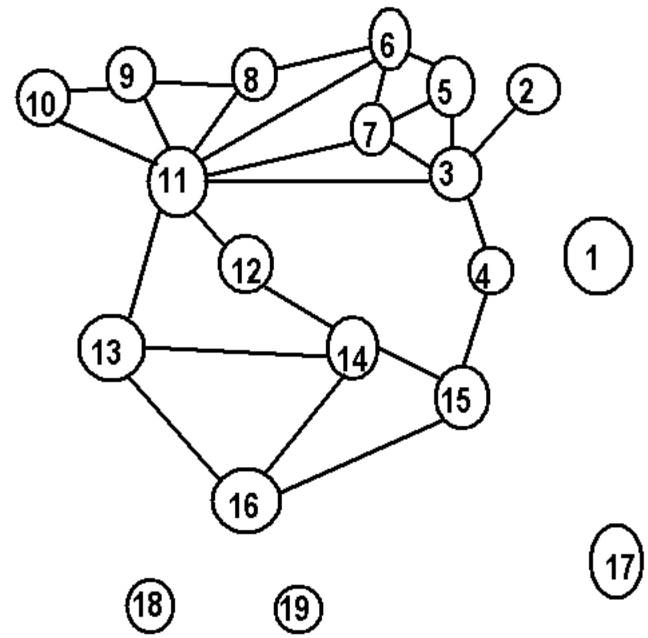
- ¿Son isomorfos estos dos grafos? Justifica tu respuesta

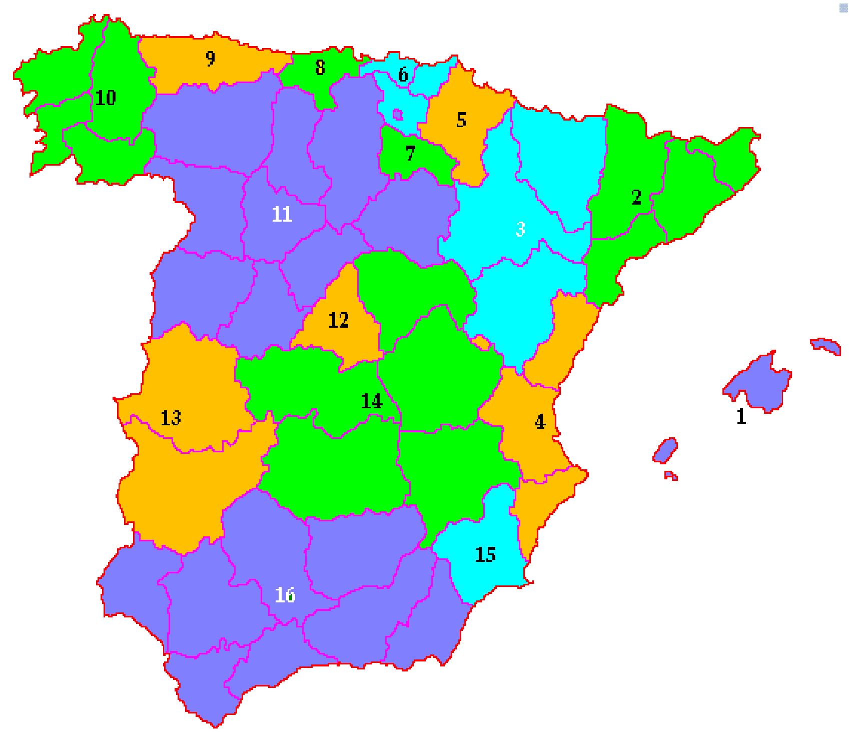




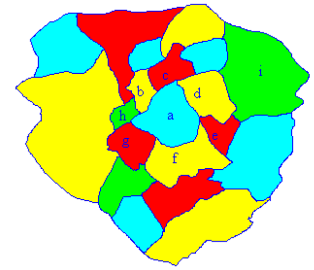
APLICACIONES:
COLORACIÓN DE GRAFOS

- ¿Cuántos colores se necesitan para colorear un mapa de forma que no haya dos regiones con frontera con el mismo color?





APLICACIONES:COLORACIÓN DE GRAFOS



- Sea G(V,A) un grafo y sea C un conjunto de colores. La coloración de los vértices V del grafo usando un color del conjunto C se encuentra dada por la función.

$f: V \rightarrow C$ tal que $\forall\, v_1, v_2 \in V$ adyacentes
$f(v_1) \neq f(v_2)$

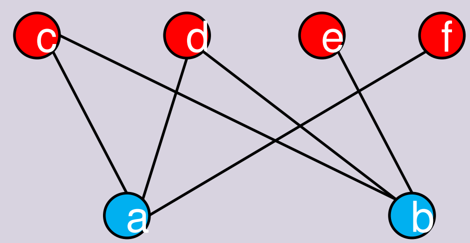
- Esto significa que cada par de vértices adyacentes deberán estar iluminados con un color diferente
- En la coloración de grafos se busca usar la menor cantidad de colores posible

NUMERO CROMÁTICO X(G)

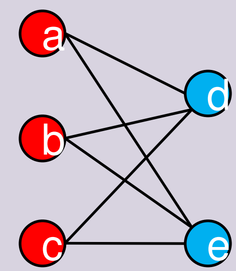
- Se llama número cromático del grafo G al número mínimo de colores con que se puede colorear un grafo, cuidando que los vértices adyacentes no tengan el mismo color.
- Pasos para colorear un grafo:

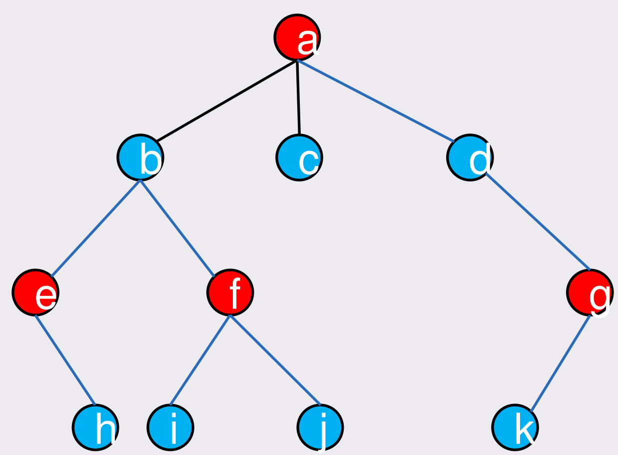
1. Seleccionar el vértice *v* de mayor grado e iluminarlo con cualquier color del conjunto C
2. Colorear los vértices adyacentes al vértice v verificando que no existan vértices adyacentes del mismo color. En caso de ser necesario intercambiar colores. Si ya están coloreados todos los vértices, terminamos, en caso contrario continuar con el paso 3
3. Seleccionar el vértice v de mayor grado que ya este coloreado y que todavía tenga vértices adyacentes sin colorear. Regresar al paso 2

CARACTERÍSTICAS DEL NÚMERO CROMÁTICO

<table>
<tr><td colspan="2">5. En general la mayoría de los grafos tienen un X(G)≤n porque se entiende que no están relacionados todos los vértices entre sí.</td></tr>
<tr><td>6. Los grafos bipartitos o bipartitos completos ($K_{n,m}$) tienen un número cromático X(G) = 2</td><td>


Grafo bipartito

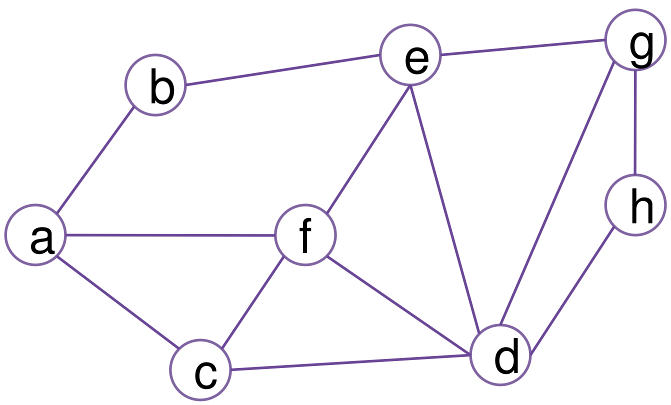


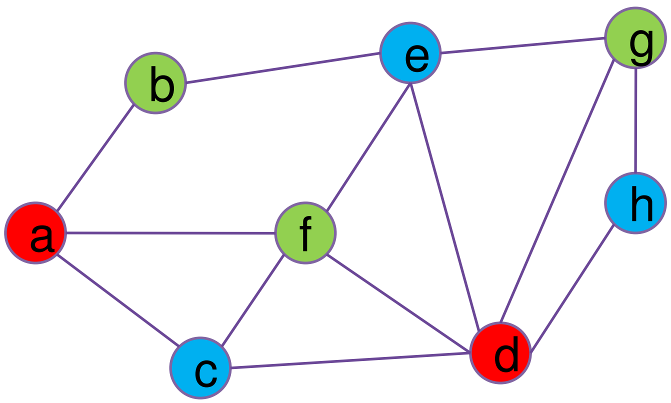
bipartito completo ($K_{2,3}$)</td></tr>
<tr><td>7. Todos los árboles de cualquier orden tienen número cromático X(G)=2 o bien se dice que son 2-coloreable</td><td>


X(G) = 2</td></tr>
</table>

EJEMPLO: COLOREO DE GRAFOS

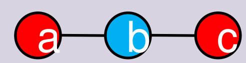
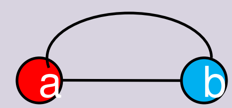
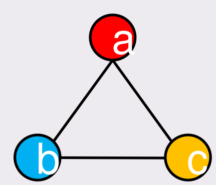
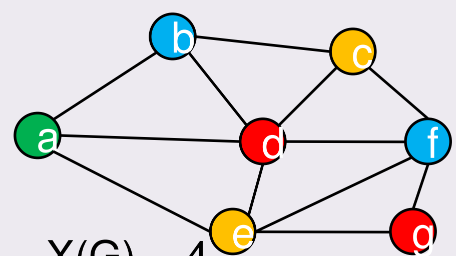
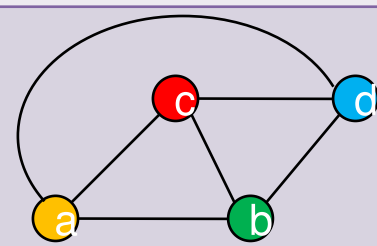
- Considere que se desea iluminar el siguiente grafo G y que se dispone para ello el conjunto C ={1,2,3,4,5}





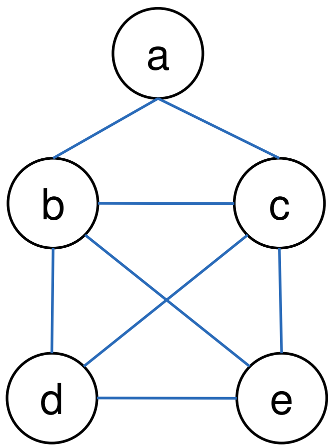
CARACTERÍSTICAS DEL NÚMERO CROMÁTICO

- El número cromático posee las siguientes siete características fundamentales:

1. Un grafo G tiene un X(G) =1 si y sólo si no tiene aristas	 **X(G) = 1**
2. El X(G) para un camino o un ciclo de longitud 2 es X(G)=2 ya que se podrán alternar los colores	  X(G) = 2
3. Si el grafo G tiene un ciclo de longitud impar entonces X(G)≥3	 X(G) = 3  X(G) = 4
4. El número cromático del grafo completo K_n es $X(K_n)=n$, considerando que un grafo K_n todos los vértices son adyacentes entre sí.	 $X(K_4) = 4$

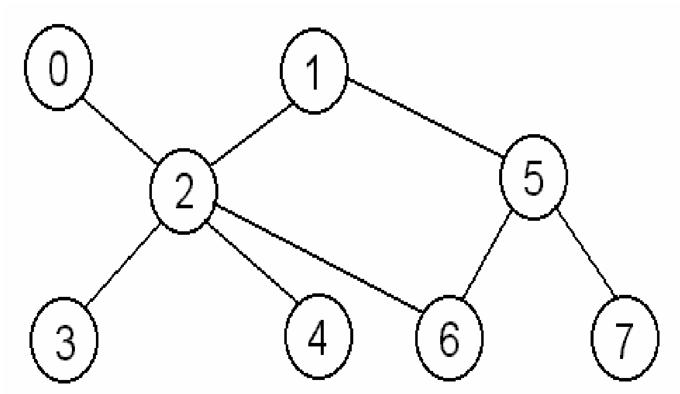
EJERCICIO

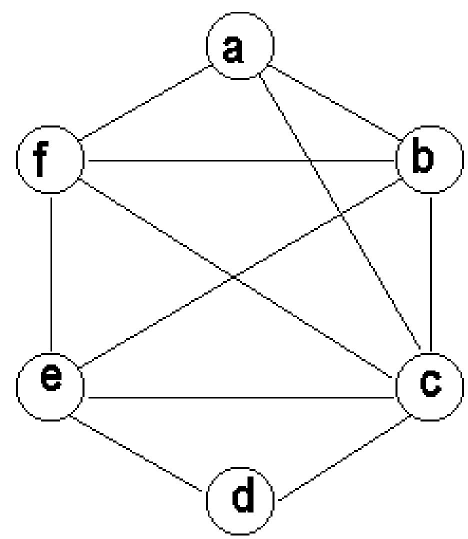
- Determinar si hay camino de Euler, circuito de euler, circuito hamiltoniano.
- Colorea el grafo.



Ejercicio

- Colorea los siguientes grafos





Árboles, ejemplos

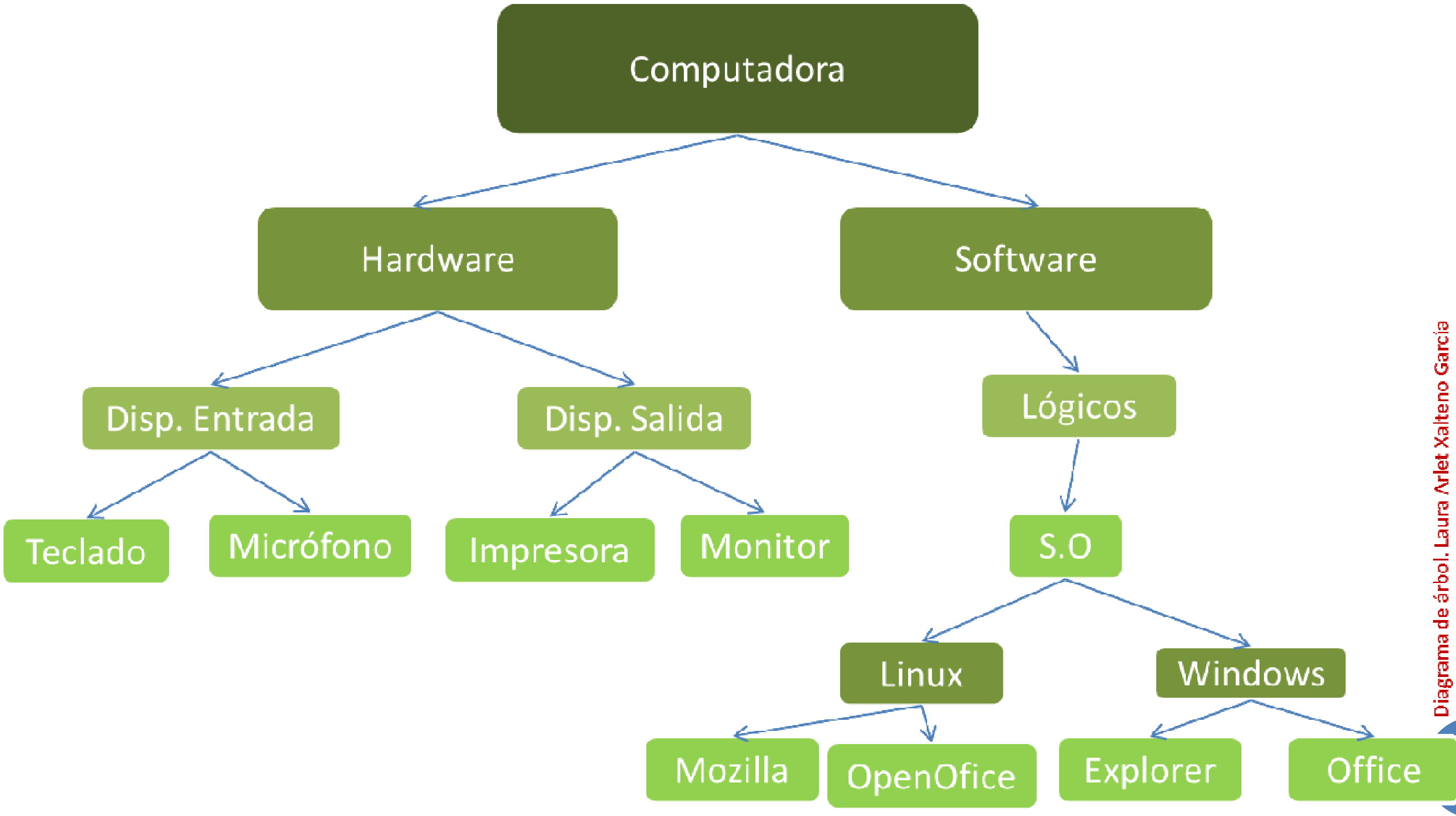
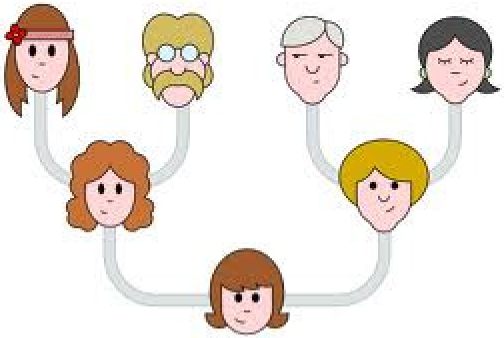
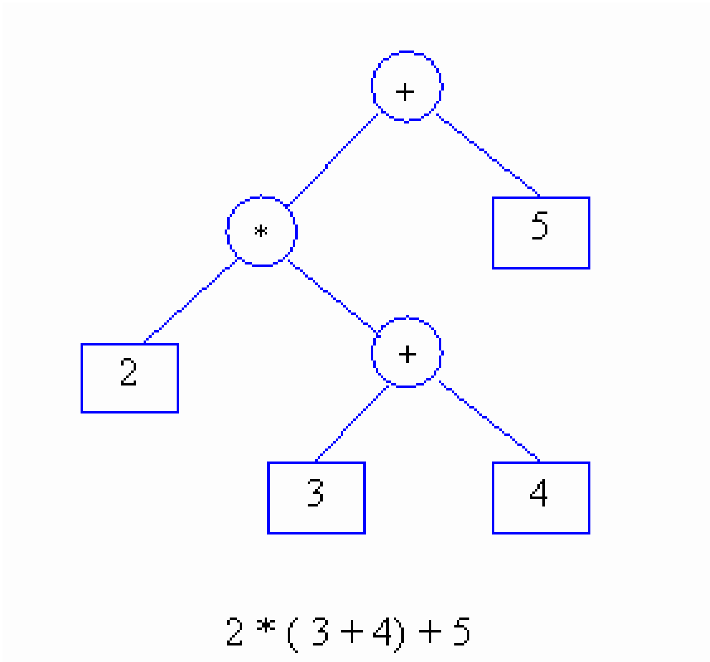


Diagrama de árbol. Laura Arlet Xalteno García

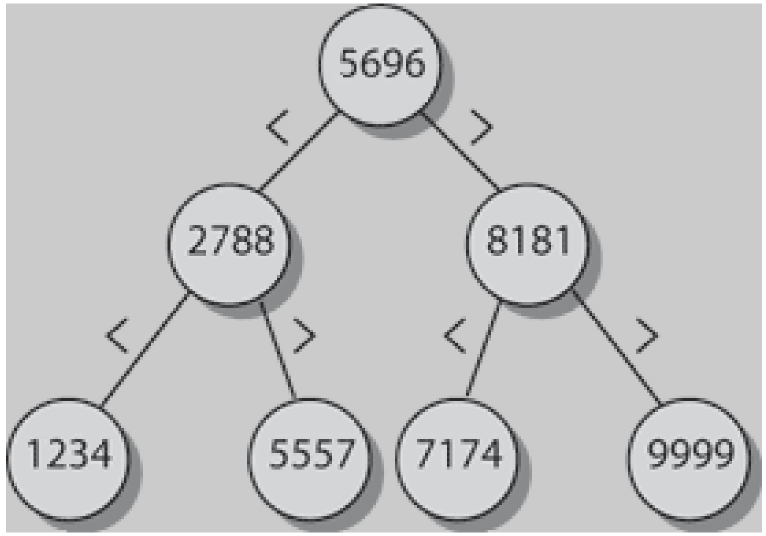
Árboles, ejemplos



Árboles, ejemplos



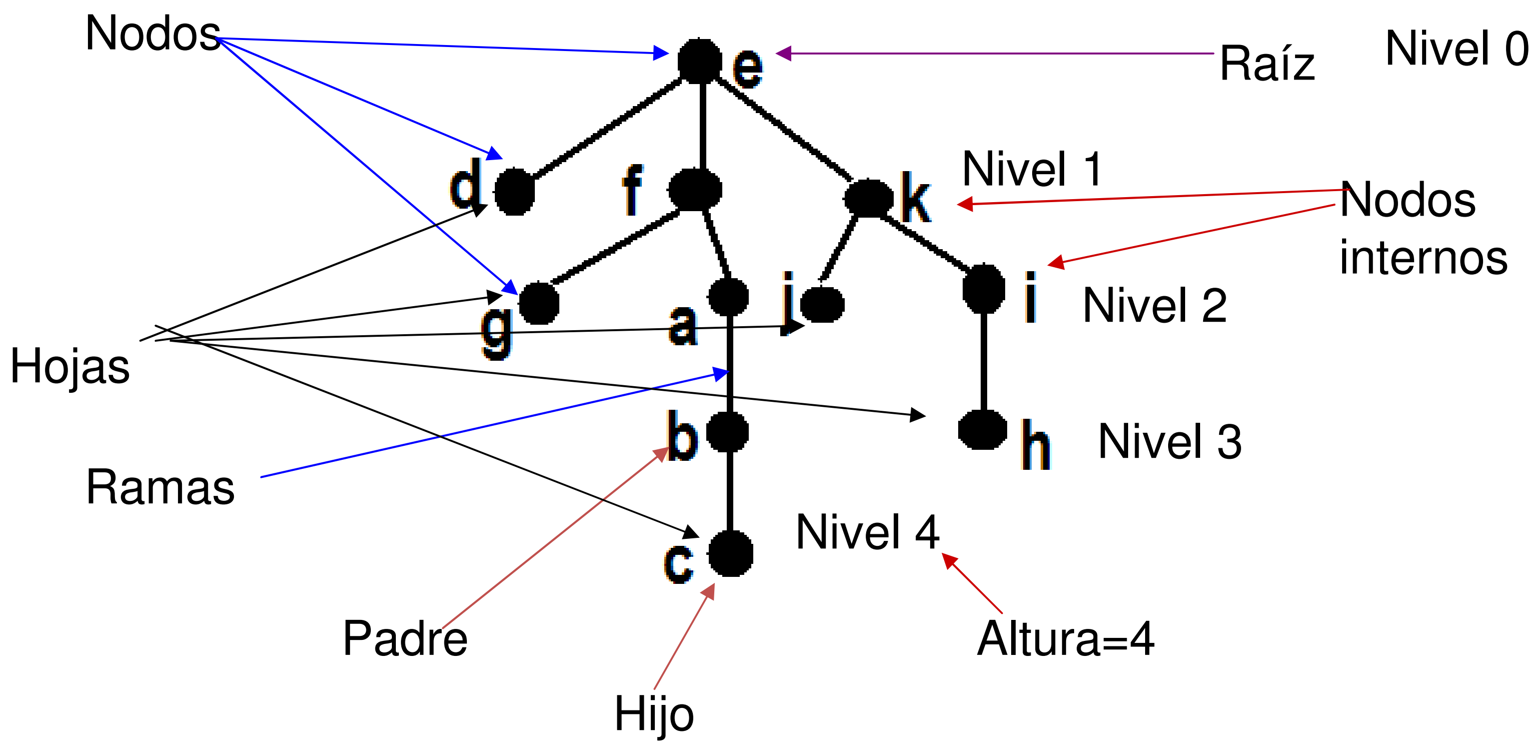
Análisis de expresiones



Árboles de búsqueda

Árboles

- Grafo conexo y sin ciclos
- Sin lados paralelos



Árboles

- Los vértices de un árbol se llaman nodos
- Los nodos descendientes inmediatos de un nodo son sus hijos, y el nodo superior es el padre
- A una secuencia descendente de nodos se le llama rama
- Los nodos sin hijos se llaman hojas, y los que sí tienen hijos nodos internos
- Un conjunto de árboles es un bosque

Árboles, propiedades

Sea G =(V,A) un árbol. Entonces:

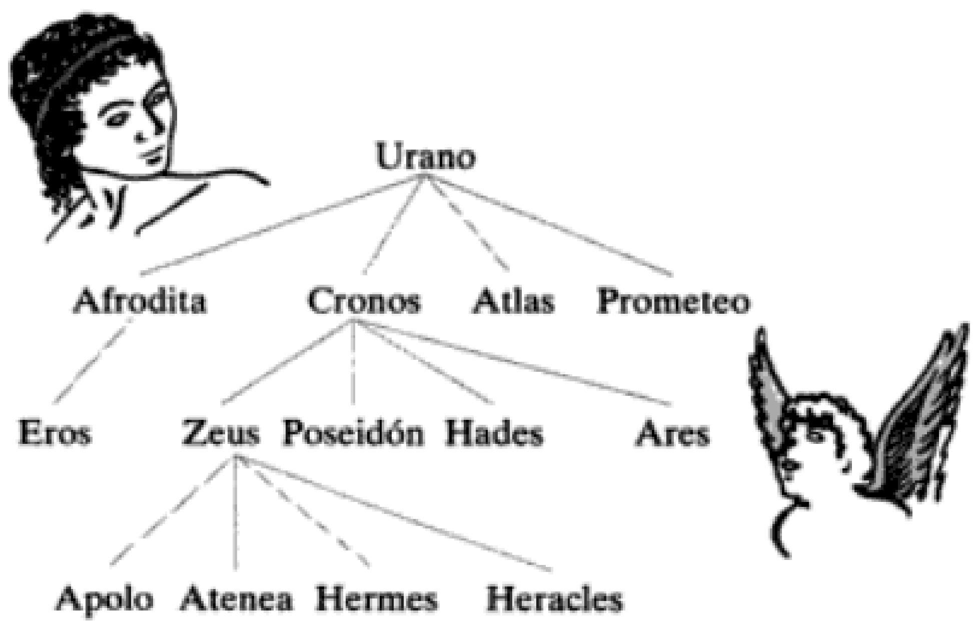
- Entre cada par de vértices x,y hay un único camino
- Al quitar de A cualquier arista resulta un bosque con 2 árboles
- Al añadir una arista nueva siempre se obtiene un ciclo
- $|A| = |V| - 1$

Propiedades

- Sea T un árbol con raíz v_0. Suponga que x, y y z son vértices en T y que $v_o, v_1, \ldots, v_n$ es un camino simple en T. Entonces
  - V_{n-1} es el padre de v_n
  - $V_o, \ldots, v_{n-1}$ son ancestros de v_n
  - V_n es un hijo de v_{n-1}
  - Si x es un ancestro de y, y es un descendiente de x
  - Si x y y son hijos de z, x y y son hermanos
  - Si s no tiene hijos, x es un vértice terminal (hoja)
  - Si x no es un vértice terminal, x es un vértice interno

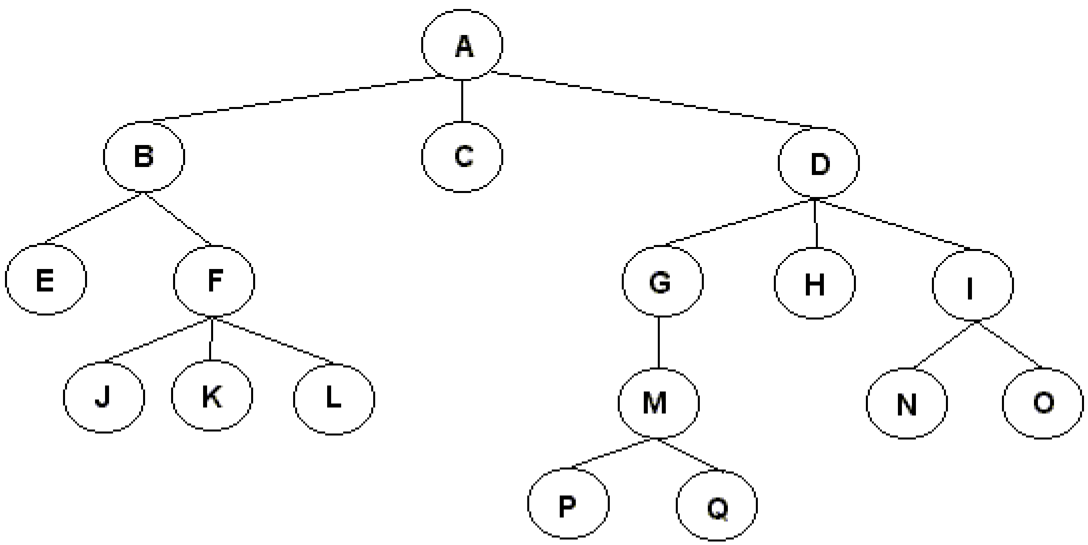
Ejercicio

- Encuentra:
  - El padre de Eros
  - Los ancestros de Hermes
  - Los hijos de Zeus
  - Los descendientes de Cronos
  - El hermano de Afrodita
  - Los vértices terminales
  - Los vértices internos



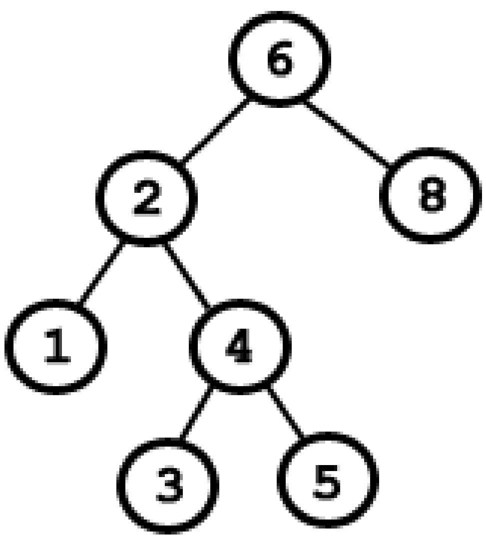
Tipos de árboles

- Árboles binarios: cada nodo padre tiene uno o dos hijos máximo.
- Árboles trinarios: cada nodo padre tiene máximo tres hijos.
- Árboles cuaternarios: cada nodo padre tiene como máximo cuatro hijos
- etc.



Tipos de árboles

- Árbol binario completo. Es aquél en el que cada nodo tiene dos ramas o ninguna.
- Un árbol binario completo con i nodos internos tiene (i + 1) hojas y (2i +1) vértices en total.



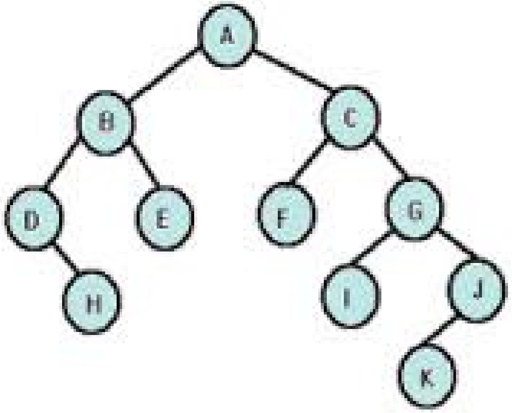
Nodos internos= 3

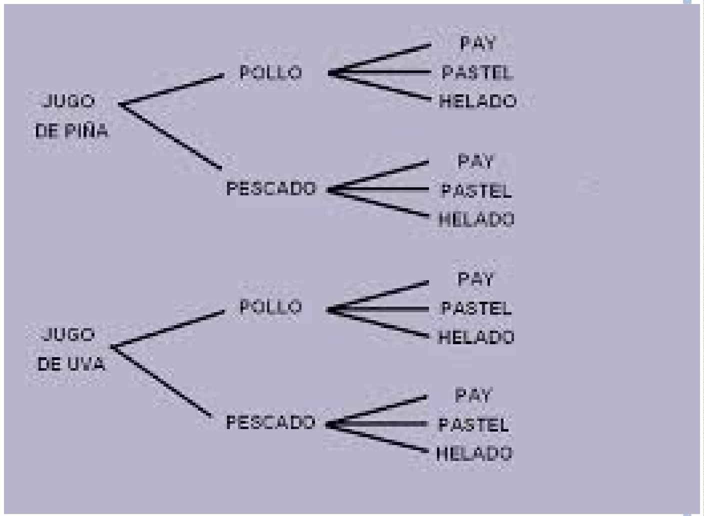
Nodos hoja= i+1=4

Total de vértices= 2i+1=2*3+1=7

Bosques

- Un bosque es un conjunto de árboles, es decir, un árbol es un bosque conectado.
- De un árbol se pueden obtener varios subárboles, mismos que forman un bosque.
- Un árbol puede considerarse un bosque conectado.
- El árbol más pequeño lo integra por lo menos dos nodos conectados por una arista.





Ejercicio

- Identifique: número de nodos, hojas, altura del árbol, niveles, nodo raíz, nodos internos, tipo de árbol.