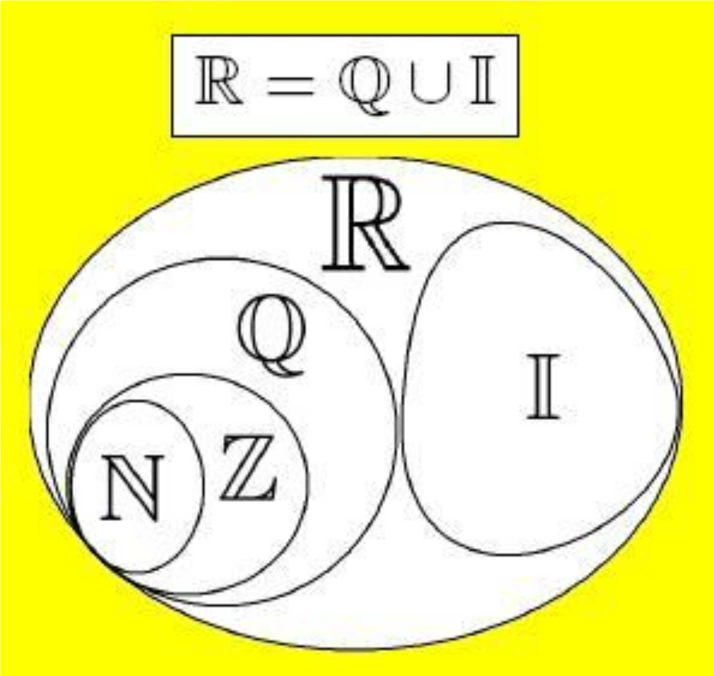

Estructuras algebraicas

Parte 1

Estructuras Algebraicas

- Una estructura algebraica es una n-tupla $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, donde a_1 es un conjunto dado no vacío, y $\{a_2,\ldots,a_n\}$ un conjunto de operaciones aplicables a los elementos de dicho conjunto.

Operación Binaria (Ley de composición interna)

- Sea S un conjunto y $\bullet$: $S x S \rightarrow S$ se dice que es una operación binaria.

- La imagen de cualquier par (a,b) bajo la operación $\bullet$ se representa como $a \bullet b$.

- En otras palabras dado un conjunto no vacío S y el producto cartesiano de S x S, $\bullet$ es una función de modo que a cada par ordenado (a,b) le hace corresponder un único elemento de S simbolizado por $a \bullet b$.

Ejemplo

- En el conjunto de los naturales N, la suma (*) es una operación interna ya que todo par ordenado (a,b) se le asigna otro valor, el cual también pertenece a los naturales N.
- Ejemplo:
  - Si fuera la operación $*(4,6) \rightarrow 4 * 6 = 10$
    - $4, 6, 10 \in N$

$*(6,8) \rightarrow 6 * 8 = 14$

$6, 8, 14 \in N$

Ejemplo de operaciones no binarias

- Sea el conjunto S = {1, 2, 3} y la operación * definida como la suma de a mas b menos 1.

•	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	
3	3		

- Hay algunos espacios vacío porque el resultado es un elemento que no pertenece al conjunto dado, por lo que se concluye que * no es una operación binaria en S. Por ejemplo: $2+3-1=4$, $4 \notin S$

Propiedades de las operaciones binarias

- Cerrada
- Conmutativa
- Asociativa
- Elemento identidad

Cerrada

- Si * es una operación binaria sobre S y $A \subseteq S$. Entonces el subconjunto A es cerrado con respecto a la operación binaria *, si y sólo si, para todo x, $y \in A$, x * $y \in A$.
- Ejemplo:
  - Tomando en cuenta que el conjunto de los números enteros $Z \subseteq R$. La suma (*) es una operación interna ya que todo par ordenado (a,b) se le puede asignar otro valor, el cual también pertenece a los números enteros Z.

Así *(2,4) → 2 * 4 = 6

*(6,-5) → 6 * -5 = 1

Conmutativa

- Si * es una operación binaria sobre S. Entonces * es conmutativa, si y sólo si, $\forall$ x, y $\in$ S,

$$x * y = y * x$$

- Ejemplo:
  - Sea el conjunto S = {A, B, C} y la operación * definida como conmutativa, si lo cumple.

•	A	B	C
A	A	B	B
B	B	A	B
C	C	B	A

A * B = B * A
B = B

B * C = C * B
B = B

Asociativa

- Si * es una operación binaria sobre S. Entonces * es asociativa, si y sólo si, $\forall$ x, y, z $\in$ S,

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

Ejemplo:

- Sea el conjunto S = {A, B, C} y la operación * definida como asociativa, si lo cumple.

•	**A**	**B**	**C**
A	A	B	B
B	B	C	A
C	C	A	B

A*(B*C)= (A*B)*C   A * (C*A) = (A*C) * A

A*A= B *C   A * C = B *A

A= A

Ejemplo

- Sea X un conjunto arbitrario, pero fijo, y sea A=P(X). La unión y la intersección de conjuntos son operaciones binarias asociativas y conmutativas en A.

EJERCICIO

- Sea A={a,b,c} y sea * la operación binaria en A, descrita por medio de la tabla:

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	a

- ¿* Cumple con las propiedades de asociativa y conmutativa?

Ejercicio

- Sea A={0,1} y sean $\wedge$ y $\vee$ las operaciones binarias definidas en A por medio de las tablas:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

- ¿Las operaciones $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias asociativas y conmutativas?

Elemento Identidad

- Si * es una operación binaria sobre S y $\boldsymbol{e} \in$ S. Entonces $\boldsymbol{e}$ es llamado elemento identidad con respecto a *, si y sólo si, $\forall$ x $\in$ S, x * $\boldsymbol{e}$ = $\boldsymbol{e}$ * x = x.
- Ejemplo:
  - Sea Z el conjunto de los enteros, el cero es su elemento identidad dado que $\forall$ x $\in$Z x*0=0*x=x.

Ejercicio

1. Tomando en cuenta que el conjunto de los números naturales N es un subconjunto de los números enteros Z, indica si la operación binaria de la resta es cerrada respecto a N, si no lo es muestra un contraejemplo.

- Define un conjunto y una operación binaria que sea conmutativa.

Ejemplo

- Si $x*y = x^2 + y^2$ $\quad$ $x, y \in R$, $x*y = y*x$

  $x*y = y*x$

  $x^2 + y^2 = y^2 + x^2$

- Si tomamos el par ordenado (-3, 2)

  $-3^2 + 2^2 = 2^2 + -3^2$

  $9 + 4 = 4 + 9$

  $13 = 13$

Estructuras Algebraicas

- Una estructura algebraica es una n-tupla $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, donde a_1 es un conjunto dado no vacío, y $\{a_2,\ldots,a_n\}$ un conjunto de operaciones aplicables a los elementos de dicho conjunto.
- (R, +) y (R, ·) son sistemas algebraicos o estructuras algebraicas porque la suma y la multiplicación de números reales son operaciones binarias sobre dicho conjunto.
- Como Z $\subseteq$R. Los números Z son cerrados con respecto a la suma y la multiplicación, es decir, (Z, +) y (Z, ·) son estructuras algebraicas.

Tipos de estructuras algebraicas

- Semigrupo
- Monoide
- Grupo
- Anillo
- Morfismo
- Congruencia

Semigrupo

- Sea S un conjunto y •: SxS→S se dice que es un semigrupo si la operación binaria es asociativa.
- Ejemplo
  - Función máximo(a,b) esto se cumple pues

Para todo a, b, c $\in$R a * (b * c) = (a * b) * c

máx {máx {a,b}, c} = máx {a, máx {b,c}}

Monoide

- Sea S un conjunto y •: SxS→S se dice que es un monoide si es un semigrupo con elemento identidad.
- Ejemplo: en este caso A es el elemento identidad

•	A	B	C
A	A	B	C
B	B	C	A
C	C	A	B

- A * A = A
- B * A = A * B = B
- C * A = A * C = C

Ejemplo monoide

- Definimos el conjunto A de las cadenas alfanuméricas, cada una es una secuencia de letras y números de cualquier longitud. (A, | |)Ejemplo:
  - abcd
  - aju73fr5
- La cadena vacía sería: ε
- Definimos la operación | | concatenación de caracteres:
  - A| |A - > A
- Ejemplo:
  - asd| |rfv - > asdrfv
- Monoide:
  - Es cerrado: Para cualesquiera dos cadenas su concatenación es una cadena alfanumérica
  - Es asociativa a| |(b | | c) = (a| |b)| |c
  - Tiene elemento neutro: cadena vacía ε | | a = a| | ε=a

Ejemplo

- El conjunto de un solo elemento $M=\{x\}$ con la operación definida por $x*x=x$ es un monoide, donde el único elemento es el elemento identidad.

- $(Z,+)$ es un monoide con 0 como elemento identidad

ESTRUCTURA ALGEBRAICA INVERTIBLE

- Sea S un conjunto y $\bullet$: $S x S \rightarrow S$ tiene elemento identidad **e** y $\mathbf{x} \in S$ entonces x es invertible si y solo si existe $\mathbf{y} \in S$ tal que $x \bullet y = y \bullet x = e$.

Grupo

- Sea S un conjunto y •: SxS→S se dice que es un Grupo si la operación binaria es asociativa, tiene elemento identidad y cada elemento de S es invertible.
- Ejemplo: Sea S={1,a,b}, el 1 es el elemento identidad

•	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

- $a^2 = b$ y $ba=1$, es decir $a*a= a^2 = b$ y $b*a=1 = a*a*a$
- Si un grupo además cumple la conmutativa se le llama *abeliano*.

EJERCICIO

1. Determinar dada la operación si las estructuras son semigrupos, monoides o grupos.
   1. S={conjunto de matrices de 2x2} y la operación $\bullet$ es Multiplicación de matrices de 2x2
   2. S={conjunto potencia de 1,2,3,4,5} y la operación $\bullet$ es $A \cup B$.