Lógica proposicional

Ivan Olmos Pineda

Introducción

- Originalmente, la lógica trataba con argumentos en el lenguaje natural

- ¿es el siguiente argumento válido?
  - Todos los hombres son mortales
  - Sócrates es hombre
  - Por lo tanto, Sócrates es mortal

- En el lenguaje natural, se presentan una infinidad de argumentos, en los cuales tenemos que determinar la veracidad o falsedad de enunciados complejos

Lógica Proposicional

- Ejemplos de otros argumentos

  - Algunas personas son políticas
  - Sócrates es una persona
  - Por lo tanto, Sócrates es político

  - Creo que todos los hombres son mortales
  - Creo que Sócrates es hombre
  - Por lo tanto, creo que Sócrates es mortal

- Estos argumentos son válidos?

Lógica Proposicional

- También se pueden presentar cuestionamientos interesantes como los siguientes:
  - Sea $A = \{1, 2, 3\}$
    - $A \in A$?
    - $A \subseteq A$?
    - $A \subset A$?
  - Sea $X = \{\{1,2,3\},\{4,5\}\}$
    - $X \in X$?
    - $A \in X$?

¿Porqué se necesita la lógica?

- Con la lógica, se busca formalizar la representación de diferentes argumentos, no importando el origen de los mismos
  - Sintaxis precisa
  - Semántica bien definida

- Se busca aplicar a
  - Matemáticas: definición de objetos matemáticos, definición de teorías matemáticas, técnicas de demostración
  - Aplicarlo para formalizar diversos aspectos en el área de computación

Aplicaciones de la lógica en la computación

- Lenguajes de programación: como se estructura la lógica de un programa
- Bases de datos: lenguajes de consulta
- Inteligencia artificial: técnicas para el razonamiento, deducción de conocimiento
- Análisis y diseño de algoritmos: análisis de complejidad de los problemas

SU IMPACTO EN LA COMUTACIÓN ES MUY FUERTE!

Lenguaje de la Lógica Proposicional

- La lógica proposicional pretende estudiar las frases declarativas simples (enunciados o proposiciones)
  - Estos elementos son los utilizados como base para la transmisión de conocimiento humano

- Una proposición se define como un enunciado que puede ser calificado como verdadero o falso y que no puede descomponerse en otras frases verdaderas o falsas

- ¿Ejemplos de lo que serían proposiciones? ¿ejemplo de lo que no serían proposiciones?

Lenguaje de la Lógica Proposicional

- Para relacionar las proposiciones, se utilizan diferentes conectivos

Nombre de la conectiva	**Representación**	**Ejemplos de frases en las que aparece**
Negación	$\neg p$	no p es falso p no es cierto p
Conjunción	$p \wedge q$	p y q p pero q p sin embargo q p no obstante q p a pesar de q
Disyunción	$p \vee q$	o p o q o ambos al menos p o q como mínimo p o q

Lenguaje de la Lógica Proposicional

Condicional (Implicación)	$p \rightarrow q$	si p entonces q p sólo si q q si p q cuando p q es necesario para p para p es necesario q p es suficiente para q para q es suficiente p no p a menos que q
Bicondicional (Equivalencia)	$p \leftrightarrow q$	p es necesario y suficiente para q p si y sólo si q

Alfabeto de la Lógica Proposicional

- La siguiente tabla describe todo el alfabeto utilizado en la lógica proposicional

Constantes:	**V F**
Variables o letras proposicionales:	p, q, r, ...
Símbolos de Conectivas:	$\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$
Signos de puntuación:	( )

Sintaxis de la Lógica Proposicional

1. Las constantes V (verdadero) y F (falso) pertenecen a LP
2. Las letras de proposición p, q, r, … pertenecen a LP
3. Si "a" y "b" pertenecen a LP, entonces:
   1. $\neg a$, $\neg b$, $(a \wedge b)$, $(a \vee b)$, $(a \rightarrow b)$, $(a \leftrightarrow b)$ pertenecen a LP
4. Se establece la jerarquía de operadores:
   1. $\neg$
   2. $\wedge, \vee$
   3. $\rightarrow, \leftrightarrow$

Ejercicios 1

- Formalizar las siguientes expresiones:

a) q si p
b) p pero q
c) como mínimo p
d) p no obstante q
e) q necesario para p
f) q suficiente para p
g) p a pesar de q
h) No p a menos que q
i) p sólo si q
j) p sin embargo q
k) p suficiente para q
l) p siempre que q
m) p a no ser que q

Ejercicios 2

- Formalizar los siguientes razonamientos
  - Si el resultado obtenido es superior al previsto en 5 unidades, será debido a no haber realizado el proceso a la temperatura adecuada o la existencia de errores en los cálculos finales
  - El análisis realizado, innecesario si nos dejamos llevar por la precipitación, se torna necesario si nos paramos a reflexionar sobre el mensaje que se pretende transmitir

Soluciones Ejercicios 1

a) $p \rightarrow q$

b) $p \wedge q$

c) p

d) $p \wedge q$

e) $p \rightarrow q$

f) $q \rightarrow p$

g) $p \wedge q$

h) $p \rightarrow q$

i) $p \rightarrow q$

j) $p \wedge q$

k) $p \rightarrow q$

l) $q \rightarrow p$

m) $\neg q \rightarrow p$

Solución Ejercicios 2

p = Resultado obtenido menor al previsto en 5 unidades.

q = Haber realizado el proceso a la temperatura adecuada.

r = Existencia de errores en los cálculos finales.

$$(\neg q \vee r) \rightarrow p$$

p = Análisis realizado es necesario.

q = Nos dejamos llevar por la precipitación.

r = Nos paramos a reflexionar sobre el mensaje que se pretende transmitir.

$$(q \rightarrow \neg p) \wedge (r \rightarrow p)$$

Semántica de la Lógica Proposicional

- Una interpretación de una fórmula F en lógica proposicional es una asignación de valores {V, F} a cada una de las letras proposicionales de F. El valor de una proposición "p" bajo una interpretación I se denota como $V_I(p)$

  - A partir de las interpretaciones, combinada con los conectivos lógicos, se formulan valores de verdad para fórmulas de diferente complejidad

Semántica de la Lógica Proposicional

- Sea la fórmula F y una interpretación I, el valor F bajo I es:

  - Si F está formada por una proposición p, entonces $V_I(F) = V_I(p)$
  - Si F es de la forma $\neg G$ entonces $V_I(F) = \begin{cases} \mathbf{V} & si\ V_I(G) = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & si\ V_I(G) = \mathbf{V} \end{cases}$
  - Si F es de la forma $G \wedge H$ entonces $V_I(F) = \begin{cases} \mathbf{V} & si\ V_I(G) = V_I(H) = \mathbf{V} \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Semántica de la Lógica Proposicional

- Si F es de la forma $G \vee H$ entonces $V_I(F) = \begin{cases} \mathbf{F} & si\ V_I(G) = V_I(H) = \mathbf{F} \\ \mathbf{V} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

- Si F es de la forma $G \rightarrow H$ entonces $V_I(F) = \begin{cases} \mathbf{F} & si\ V_I(G) = \mathbf{V} \text{ y } V_I(H) = \mathbf{F} \\ \mathbf{V} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

- Si F es de la forma $G \leftrightarrow H$ entonces $V_I(F) = \begin{cases} \mathbf{V} & si\ V_I(G) = V_I(H) \\ \mathbf{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Ejemplos

- Determine el valor de las siguientes fórmulas bajo las interpretaciones siguientes
  - $V_I(p) = V$, $V_I(q)=V$, $V_I(r)=F$

  - $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \leftrightarrow \neg p \vee q$
  - $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg q \vee \neg p$
  - $(\neg p \vee q) \rightarrow p \wedge q \rightarrow (r \rightarrow p \vee q)$

Comentarios

- Una interpretación I es un MODELO para una fórmula F si $V_I(F) = V$

- Existe una clasificación de las fórmulas proposicionales
  - Válida o tautología: todas las interpretaciones son un modelo (para toda interpretación I, tal que $V_I(F) = V$), denotado por $\models F$
  - Satisfactible: alguna interpretación es un modelo (existe una interpretación I, tal que $V_I(F) = V$)
  - Insatisfacible: ó contradicción ninguna interpretación es un modelo (no existe una interpretación I, tal que $V_I(F) = V$)

Tautologías

- Listado de algunas tautologías conocidas

1. $F \rightarrow F$ (ley de identidad).
2. $F \vee \neg F$ (ley del tercio excluso).
3. $\neg(F \wedge \neg F)$ (principio de no contradicción).
4. $(\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$ (ley de Clavius).
5. $\neg F \rightarrow (F \rightarrow G)$ (ley de Duns Scoto).
6. $((F \rightarrow G) \rightarrow F) \rightarrow F$ (ley de Peirce).
7. $(F \rightarrow G) \wedge F \rightarrow G$ (modus ponens).
8. $(F \rightarrow G) \wedge \neg G \rightarrow \neg F$ (modus tollens).

Modelos

- Notación: $V_i \models F$ (V_i es un modelo de F)

- Por ejemplo, considere $F = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
  - $v_1(p) = v_1(r) = V$, $v_1(q) = F$, entonces $v_1 \models (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
  - $v_2(r) = V$, $v_2(p) = v_2(q) = F$, entonces $v_2 \not\models (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$

Modelos

- Sea $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$ un conjunto de fórmulas
- Modelo de un conjunto de fórmulas

Def.: v es modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $v \models F$.

Representación: $v \models S$.

- P.E. Sea $S = \{p \lor q, \neg q \lor r, q \rightarrow r\}$, citar algún modelo para S

Equivalencia Lógica

Equivalencia Lógica

- Se dice que A y B son equivalentes lógicamente (denotado como $A \equiv B$ ó $A \Leftrightarrow B$), si para toda interpretación I, se cumple que $V_I(A) = V_I(B)$

- Existen algunas equivalencias ya conocidas dentro de la lógica proposicional

Supresión de Implicación: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Contraposición: $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

Supresión de Doble Implicación: $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Equivalencias lógicas

Absorción	$A \wedge (B \vee A) \equiv A$	$A \vee (B \wedge A) \equiv A$
	$A \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$A \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Elemento neutro	$A \wedge \mathbf{V} \equiv A$	$A \vee \mathbf{F} \equiv A$
E. Complementario	Contradicción $A \wedge \neg A \equiv \mathbf{F}$	Medio Excluido $A \vee \neg A \equiv \mathbf{V}$
Idempotencia	$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
Commutativa	$A \vee B \equiv B \vee A$	$A \wedge B \equiv B \wedge A$
Asociativa	$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
Distributiva	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
De Morgan	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
Doble Negación (Involución)	$\neg\neg A \equiv A$	

Consecuencia Lógica

- Sea C un conjunto de fórmulas $\{P_1, \ldots, P_n\}$ y sea Q una fórmula. Se dice que Q es **consecuencia lógica** del conjunto C de premisas (se denota $C \Rightarrow Q$) si toda interpretación que es un modelo de C es también un modelo de Q
  - $V_I(P_1) = V_I(P_2) = \ldots = V_I(P_n) = V$, entonces $V_I(Q) = V$
  - Q es consecuencia lógica de unas premisas es equivalente a pensar que Q toma valor V en cualquier mundo en el que las premisas tomen valor V
- $\{P_1, \ldots, P_n\} \Rightarrow Q$ se denomina razonamiento, donde $\{P_1, \ldots, P_n\}$ se denominan premisas y Q la conclusión