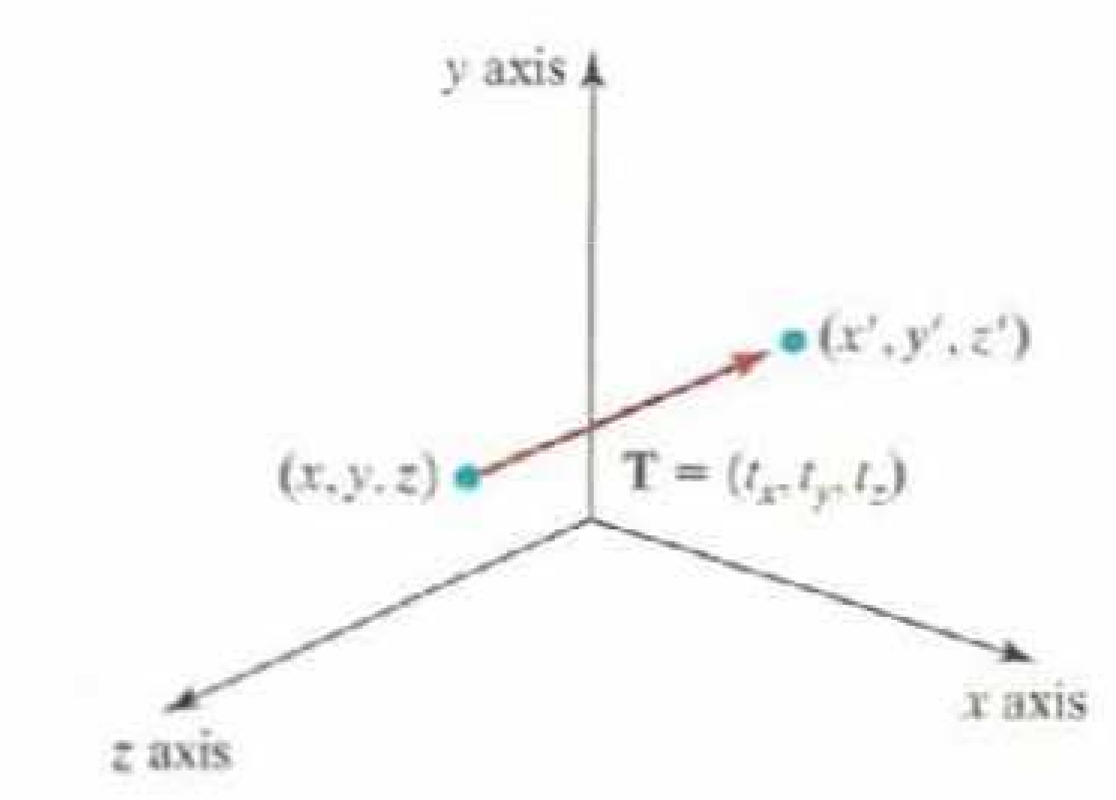
Transformaciones Geométricas 3D

Introducción 3D

- Cuando nos introducimos al mundo 3D, hay que considerar:
  - El factor de profundidad
  - Las combinaciones que se pueden generar sobre 3 ejes
  - La perspectiva de observación
  - …
- Los operadores se ven afectados en diferente medida
  - Translación
  - Rotación
  - Escalamiento
  - …

Translación 3D

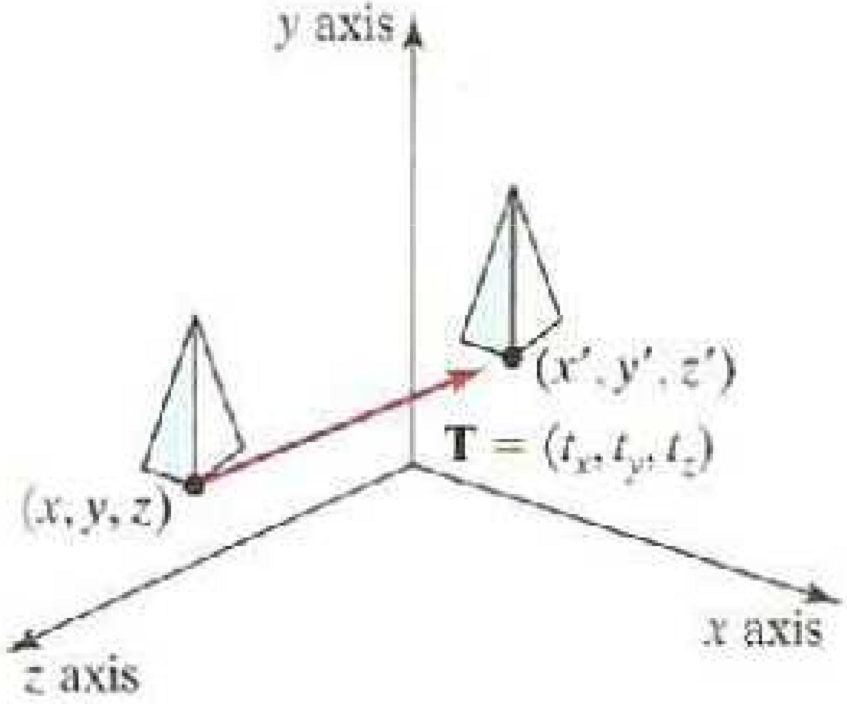
- Así como en el espacio 2D, la traslación se define a partir de un vector, ahora con 3 componentes



Traslación 3D

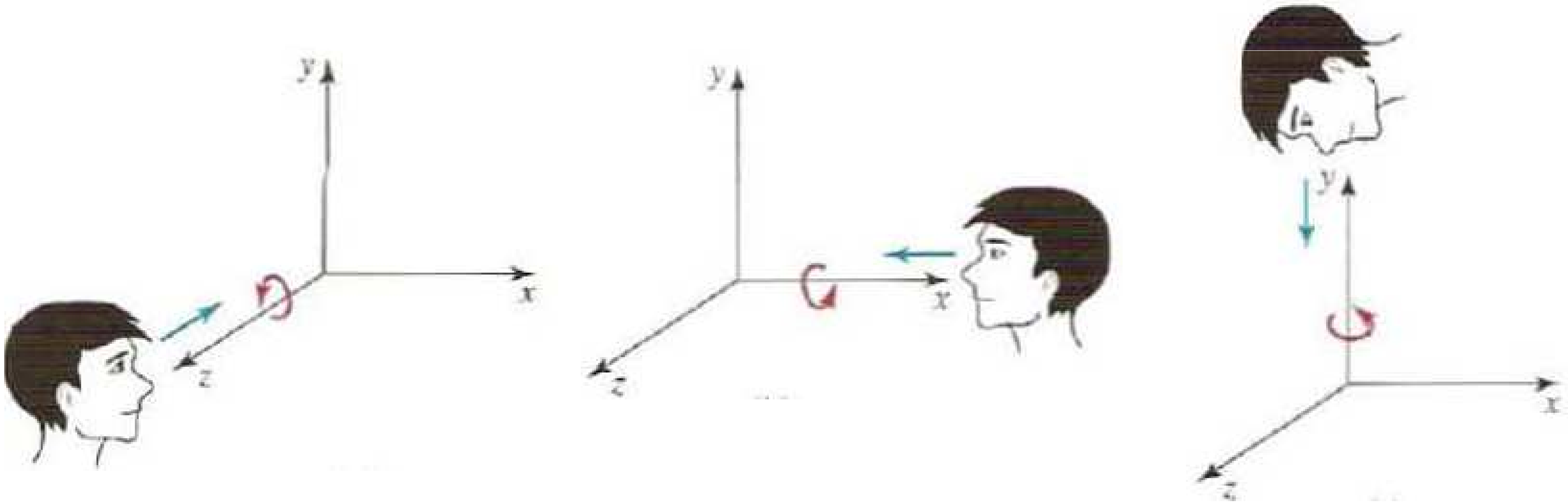
- El operador de traslación se puede definir a través de una matriz de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotación 3D

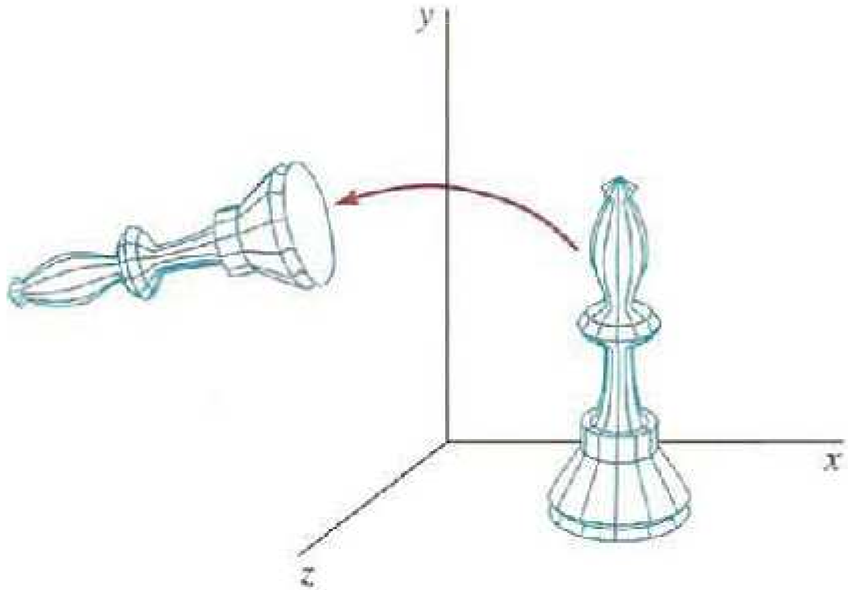
- Las rotaciones 3D se pueden realizar con cualquier grado de libertad
  - En general, se derivan de las combinaciones de rotación a partir de los ejes X, Y, Z



Matriz de Rotación – Eje z

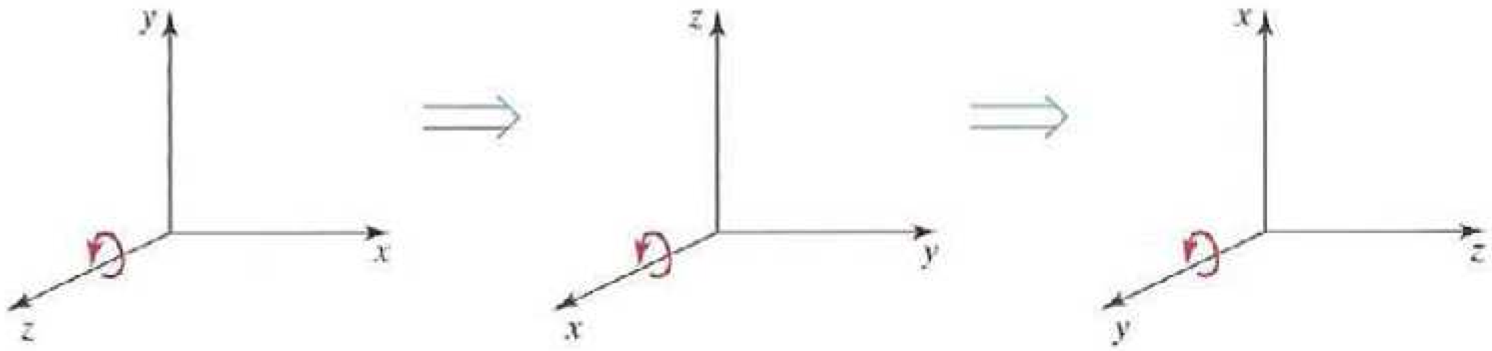
- Para realizar la rotación con respecto al eje Z se emplea la matriz siguiente

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotaciones 3D para los ejes X, Y

- A partir de la rotación sobre el eje Z, es posible derivar la rotación para cualquiera de los otros 2 ejes, simplemente utilizando una permutación cíclica
  - Para obtener la rotación en eje X y Y, cíclicamente se sustituye X con Y, Y con Z y Z con X

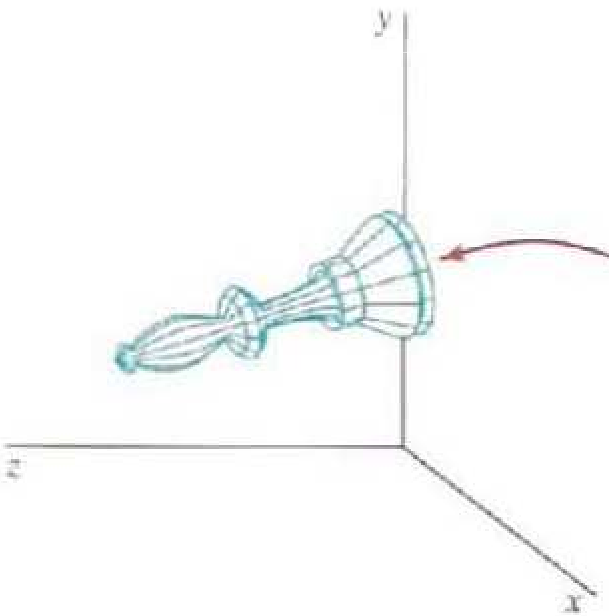


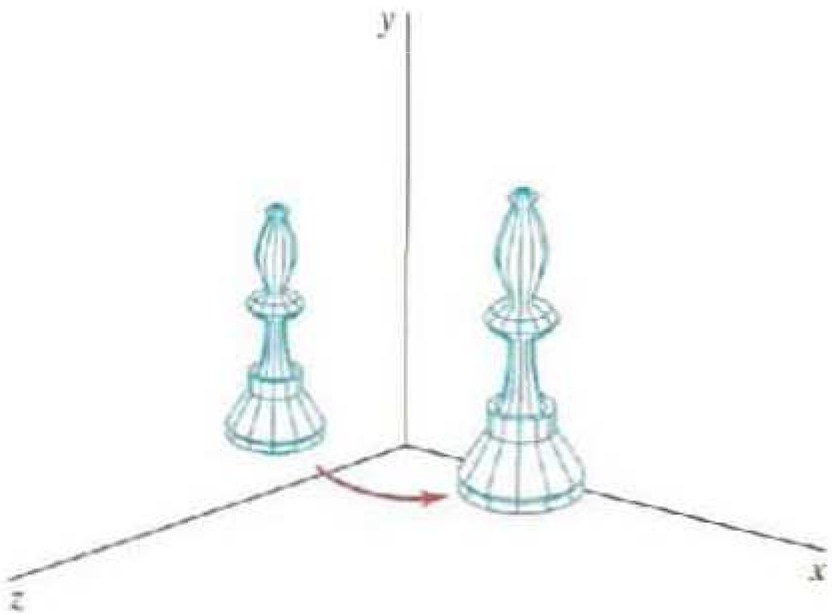
Rotaciones 3D – X, Y, Z

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$
$$x' = x$$

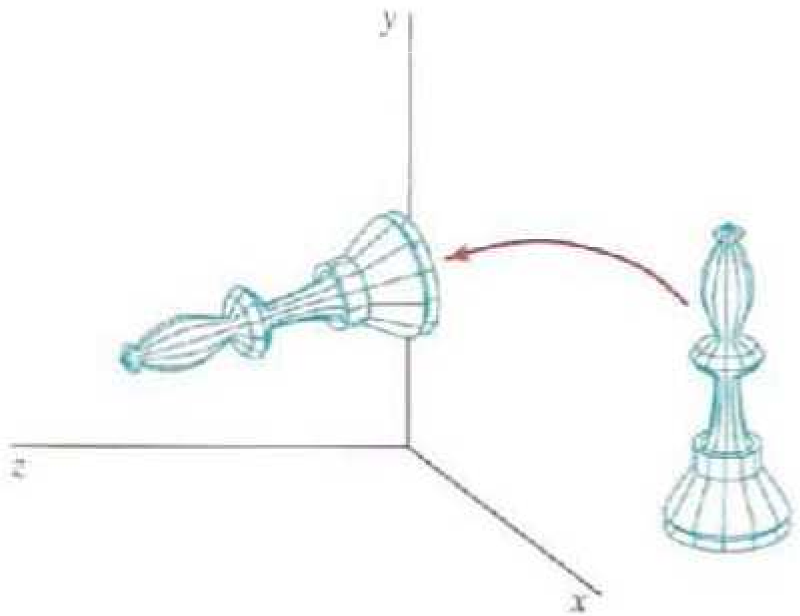
$$z' = z\cos\theta - x\sin\theta$$
$$x' = z\sin\theta + x\cos\theta$$
$$y' = y$$

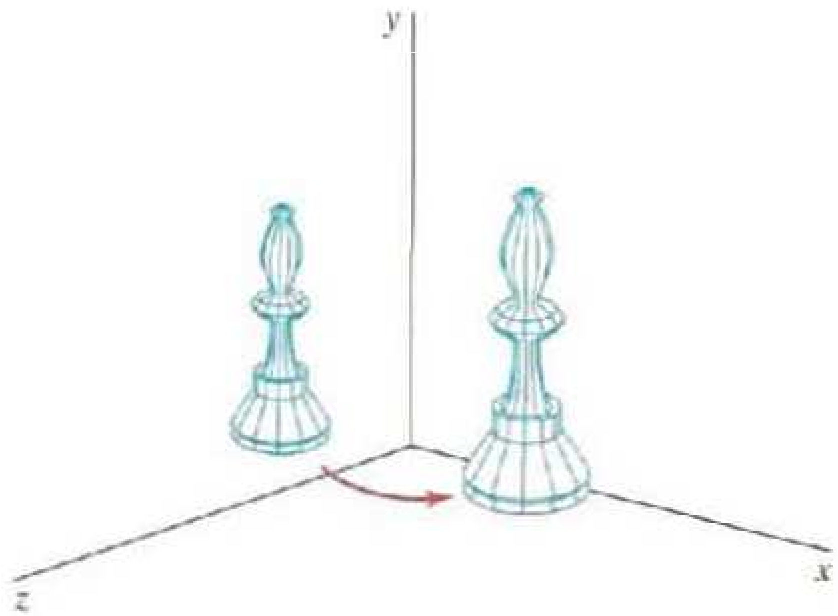




Matrices de Rotación 3D sobre los ejes

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



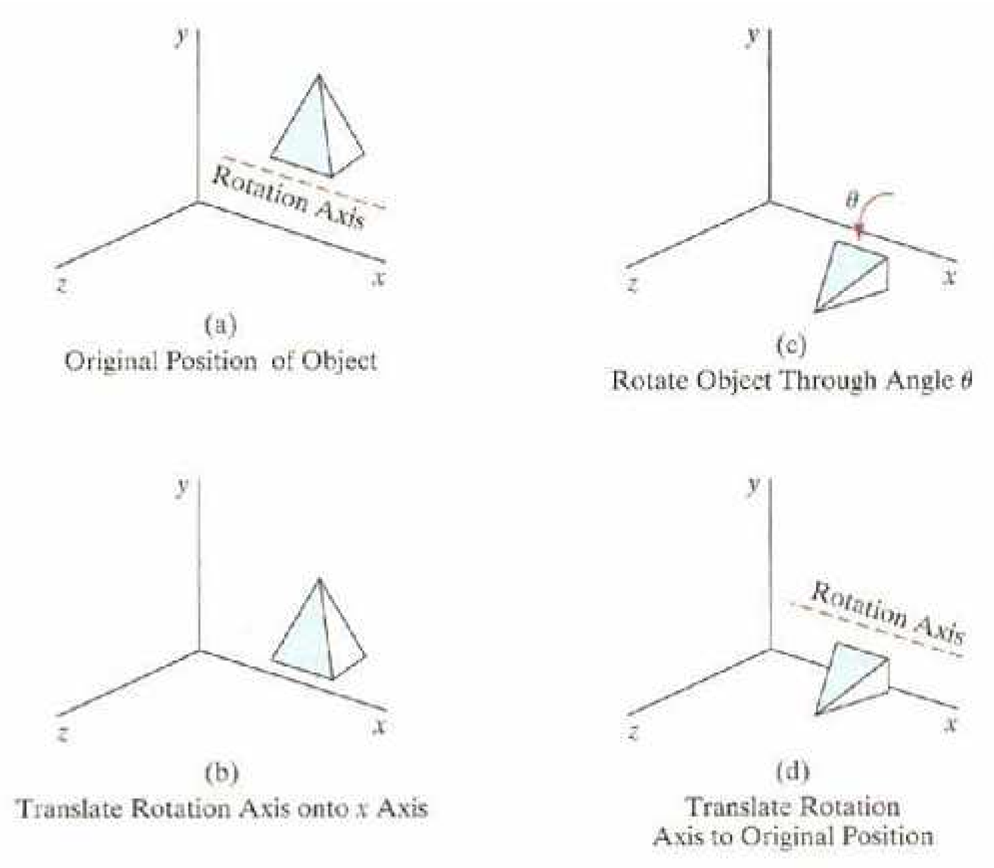


Ejercicio

- Dibujar un rectángulo 3D (coordenadas libres) e implementar los operadores de traslación y rotación 3D sobre ejes X, Y, Z
  - Investigar como dibujar un punto y una línea 3D en openGL
  - Crear la figura a partir de estas primitivas

Rotación 3D paralela a un eje de rotación

- Para rotar un objeto 3D con un eje de rotación paralelo a un eje:
  - Primero se mueve el eje de rotación al eje de rotación definido para trabajar (uno de los 3 ejes del plano 3D)
  - Se aplica la rotación que se desea aplicar
  - Se regresa el eje de rotación a su posición original



Rotación 3D paralela a un eje

- Matricialmente, considere que un punto P=(x,y,z) será rotado con respecto al eje X. Las operaciones a realizar serán las siguientes:

$$P' = T^{-1} \cdot R_x(\theta) \cdot T \cdot P$$

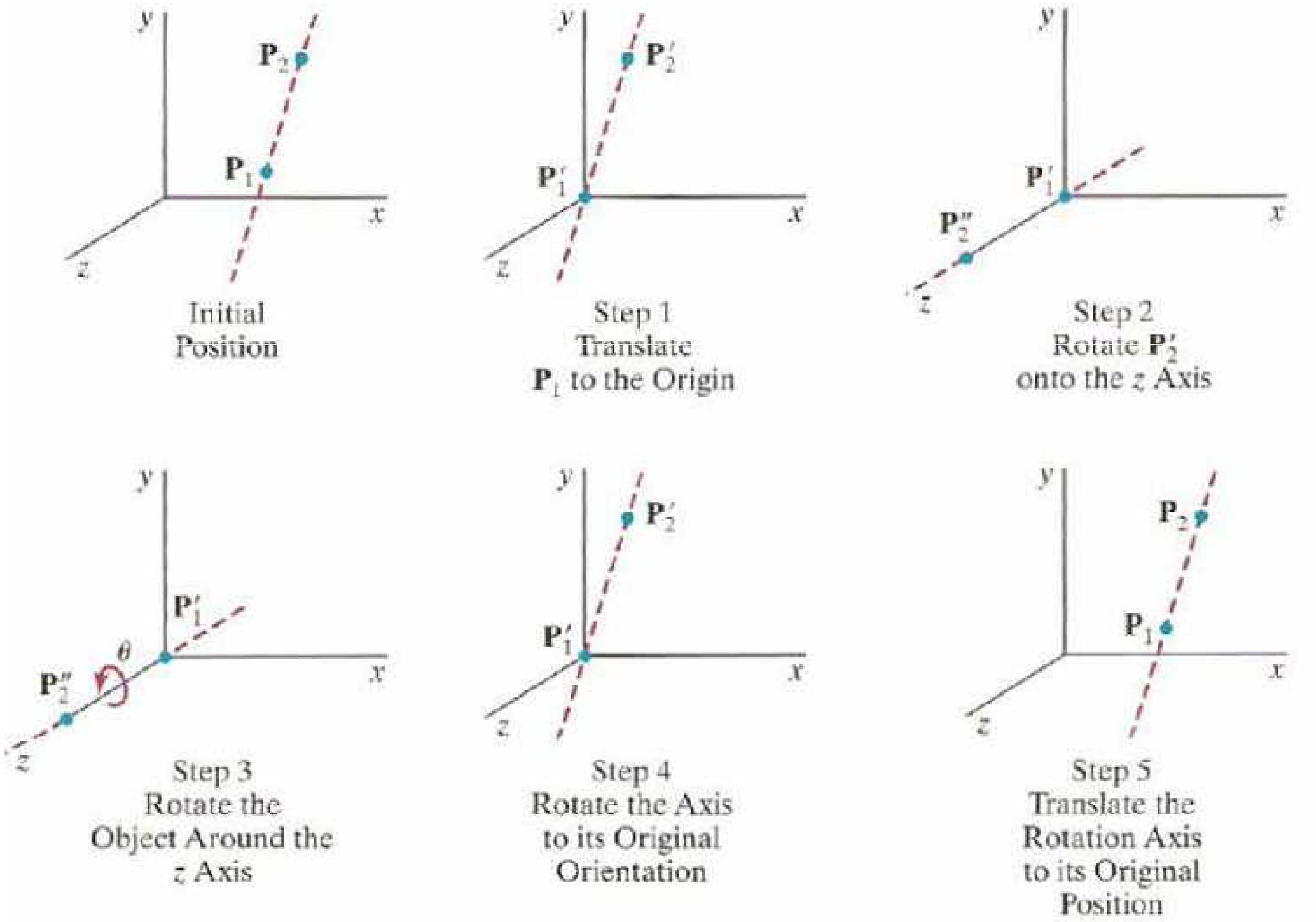
- Donde:
  - P' es el punto resultante de la rotación
  - R_x es la matriz se rotación con respecto al ángulo especificado
  - T es la matriz de translación al eje
  - T^{-1} es la matriz inversa de T de traslación al eje

Rotación 3D general

- Cuando el eje de rotación de un objeto no es paralelo a uno de los ejes, se tiene que proceder de la siguiente manera:
  1. Trasladar el objeto de tal forma que el eje de rotación pase a través de la coordenada de origen
  2. Rotar el objeto de tal forma que el eje de rotación coincida con alguno de los ejes de coordenadas
  3. Realizar la rotación especificada sobre el eje de coordenadas seleccionado
  4. Aplicar la rotación inversa para regresar el eje de rotación a su orientación original
  5. Aplicar la translación inversa para regresar el eje de rotación a su posición espacial original

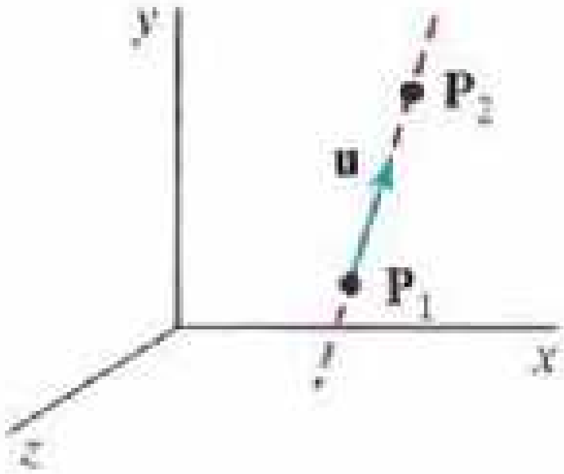
Rotación 3D General

- Si la rotación no es paralela a uno de los ejes del plano



Rotación 3D general

- El paso 2 es posible realizarlo seleccionando cualquiera de los ejes (consideremos el caso donde se selecciona el eje Z)
  - Por simplicidad, consideremos que el eje de rotación es definido por dos puntos P1 y P2



Rotación 3D general

- Si P1 = (x1, y1,z1) y P2 = (x2, y2,z2), se tiene lo siguiente:
  - V = (P2 – P1) : componentes del eje de rotación
  - u = V / |V| = (a,b,c) : vector unitario del eje de rotación donde

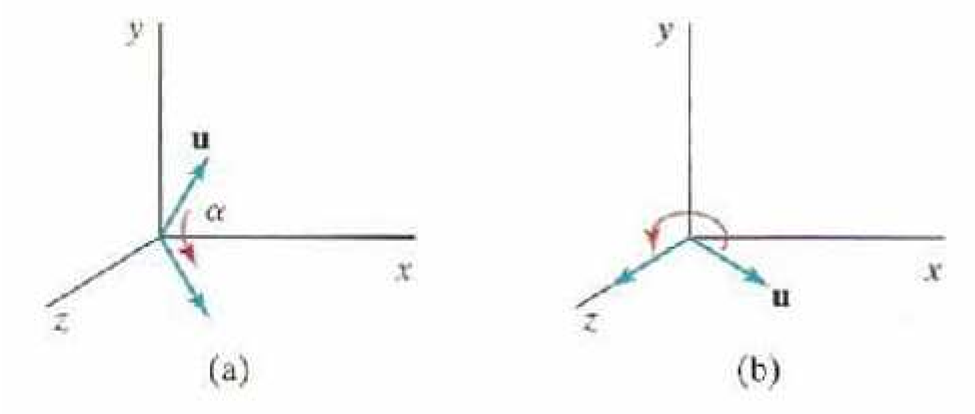
$$a = \frac{x_2 - x_1}{|\mathbf{V}|}, \qquad b = \frac{y_2 - y_1}{|\mathbf{V}|}, \qquad c = \frac{z_2 - z_1}{|\mathbf{V}|}$$

  - Aquí asumimos que el eje de rotación apunta en la dirección de rotación en sentido a las manecillas del reloj (mirando a través del eje de rotación)

Rotación 3D general

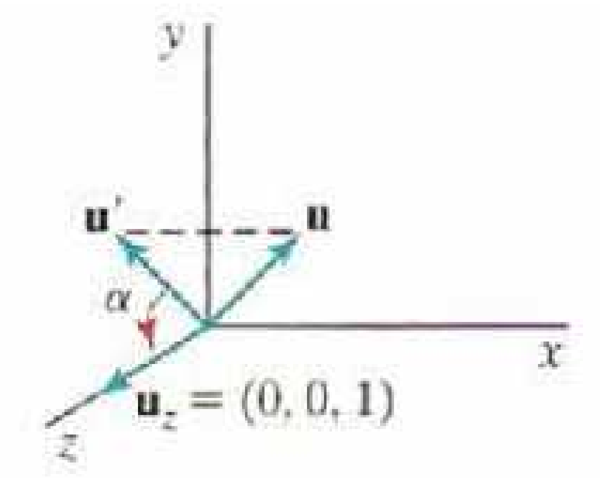
- Con la notación anterior, los pasos para la rotación libre son los siguientes:
  1. Se define la matriz de traslación al origen (tomando a P1)
  2. Se realizan las transformaciones para colocar el eje de rotación sobre uno de los ejes del sistema (este paso se puede realizar de diferentes formas)
     1. Se rota a U sobre X para colocarlo en el plano XZ
     2. Se rota a U sobre Z para colocarlo en el plano YZ

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotación General 3D

- Para realizar el paso 2 (proyectar a U sobre el plano XZ) se considera lo siguiente:
  - Notemos que U genera un ángulo α sobre el plano XZ, el cual se puede observar de forma más clara si se proyecta a u sobre el plano YZ (vector u')



Notemos lo siguiente:

$$Como\ u = (a,b,c) \Rightarrow u' = (0,b,c)$$

Además: $d = |u'| = \sqrt{b^2 + c^2}$

De lo anterior se concluye:

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{d},\ sen(\alpha) = \frac{b}{d}$$

Rotación 3D general

- Proyectar a u sobre el plano XZ, requiere rotar a dicho vector sobre X, por lo que la matriz de rotación a utilizar es:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sustituyendo por el ángulo correspondiente α, se tiene que:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c/d & -b/d & 0 \\ 0 & b/d & c/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

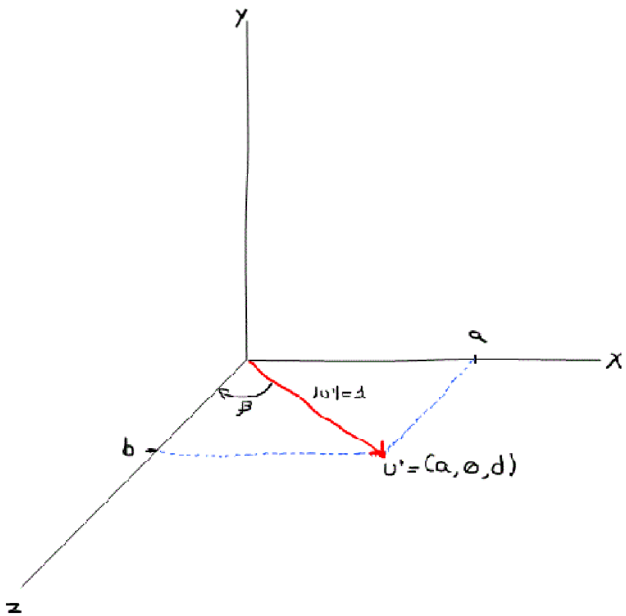
Rotación 3D general

- Aplicando $R_x(\alpha)$ al punto $u = (a,b,c)$ se tiene:

$$R_x(\alpha)u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c/d & -b/d & 0 \\ 0 & b/d & c/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ (bc-bc)/d \\ (b^2+c^2)/d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ d \\ 1 \end{bmatrix} = u'$$

Rotación 3D general

- El siguiente paso consiste en calcular la matriz de rotación del vector *u'* proyectado sobre el plano XZ para colocarlo sobre el eje positivo Z



$$|u'| = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

De la figura, se puede observar que:

$$\sin(\beta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} = a, \quad \cos(\beta) = \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} = d$$

Aplicando la matriz de rotación sobre Y:

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto: $$R_y(\beta)u' = \begin{bmatrix} d & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ d \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotación 3D general

- Con estos pasos, se ha colocado el vector u sobre el eje Z positivo

3. Con las matrices de transformación ya expuestas, se realiza la rotación del vector u de acuerdo al ángulo θ:

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

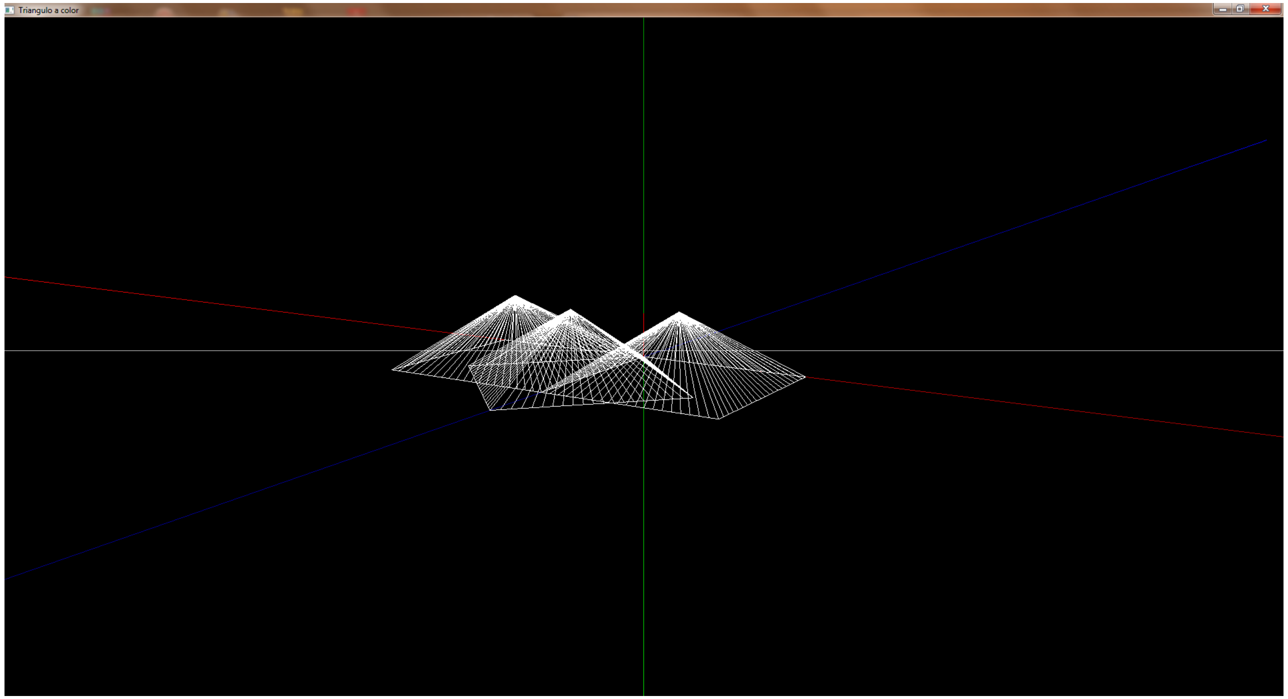
Rotación 3D general

4. Finalmente se debe de regresar el eje de rotación a su posición original, aplicando los operadores inversos.

- En general, la matriz de rotación para cualquier eje se expresa como:

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R}_x^{-1}(\alpha) \cdot \mathbf{R}_y^{-1}(\beta) \cdot \mathbf{R}_z(\theta) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) \cdot \mathbf{T}$$

Rotación 3D general

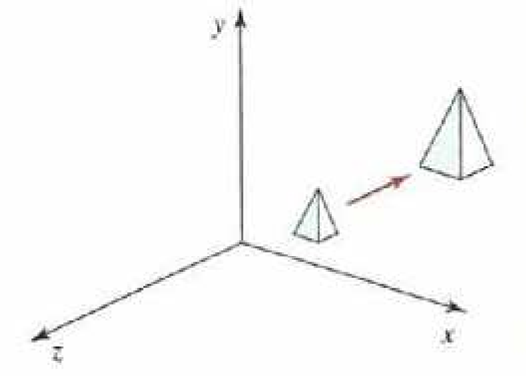


Escalado 3D

- Escalar un punto P=(x,y,z) con respecto al origen es una extensión directa del caso 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

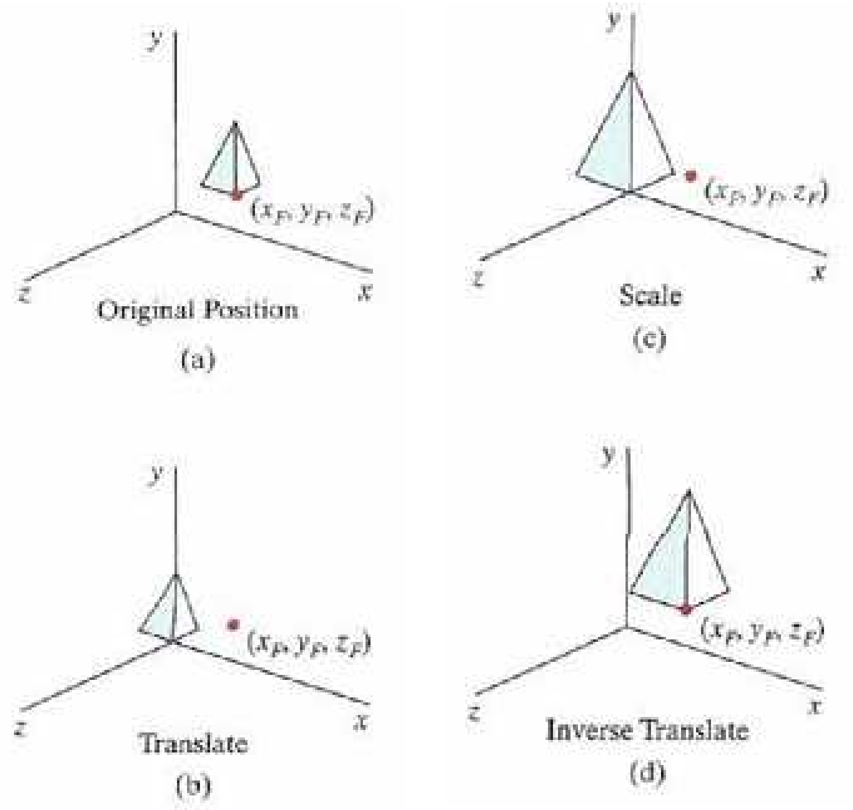
Punto P' Matriz de escalado S Punto P



- Notas
  - Si los valores de sx, sy, sz son diferentes, se cambiará el aspecto general de la imagen
  - Para escalar objetos 3D (al igual que en el caso 2D) se debe elegir un punto de referencia del mismo

Escalado 3D

- Considere que el punto P=(px,py,pz) se toma como referencia de un objeto 3D. Para escalar el objeto se debe realizar:
  - Trasladar el punto P al origen (incluyendo todos los puntos del objeto)
  - Aplicar la matriz de escalado a cada punto del objeto
  - Regresar el objeto a la posición original de P



Escalado 3D

- Matriz de traslación para objetos 3D

$$T_P S_{(s_x, s_y, s_z)} T_{-P} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)p_x \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)p_y \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$