Universidad de Cádiz

Escuela Superior de Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Apuntes de Lógica Matemática

1. Lógica de Proposiciones

Francisco José González Gutiérrez

Cádiz, Abril de 2005

Lección 1

Lógica de Proposiciones

Contenido

Y ahora llegamos a la gran pregunta del porqué. El robo no ha sido el objeto del asesinato, puesto que nada desapareció. ¿Fue por motivos políticos, o fue una mujer? Esta es la pregunta con que me enfrento. Desde el principio me he inclinado hacia esta última suposición. Los asesinatos políticos se complacen demasiado en hacer su trabajo y huir. Este asesinato, por el contrario, había sido realizado muy deliberadamente, y quien lo perpetró ha dejado huellas por toda la habitación, mostrando que estuvo allí todo el tiempo.

Arthur Conan Doyle. Un Estudio en Escarlata. 1887

La estrecha relación existente entre la matemática moderna y la lógica formal es una de sus características fundamentales. La lógica aristotélica era insuficiente para la creación matemática ya que la mayor parte de los argumentos utilizados en ésta contienen enunciados del tipo "si, entonces", absolutamente extraños en aquella.

En esta primera lección de lógica estudiaremos uno de los dos niveles en los que se desenvuelve la moderna lógica formal: la lógica de enunciados o de proposiciones.

1.1 Proposiciones y Tablas de Verdad

En el desarrollo de cualquier teoría matemática se hacen afirmaciones en forma de frases y que tienen un sentido pleno. Tales afirmaciones, verbales o escritas, las denominaremos enunciados o proposiciones.

1.1.1 Proposición

Llamaremos de esta forma a cualquier afirmación que sea verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

Ejemplo 1.1 Las siguientes afirmaciones son proposiciones.

(a) Gabriel García Márquez escribió *Cien años de soledad.*

(b) 6 es un número primo.

(c) 3+2=6

(d) 1 es un número entero, pero 2 no lo es.

Nota 1.1 Las proposiciones se notan con letras minúsculas, p, q, r ...... La notación p :*Tres más cuatro es igual a siete* se utiliza para definir que p es la proposición "tres más cuatro es igual a siete".

Este tipo de proposiciones se llaman *simples*, ya que no pueden descomponerse en otras.

Ejemplo 1.2 Las siguientes no son proposiciones.

(a) $x + y > 5$

(b) ¿Te vas?

(c) Compra cinco azules y cuatro rojas.

(d) $x = 2$

<u>Solución</u>

En efecto, (a) es una afirmación pero no es una proposición ya que será verdadera o falsa dependiendo de los valores de x e y e igual ocurre con la afirmación (d). Los ejemplos (b) y (c) no son afirmaciones, por lo tanto no son proposiciones.

Desde el punto de vista lógico carece de importancia cual sea el contenido material de los enunciados, solamente interesa su *valor de verdad.*

1.1.2 Valor de Verdad

Llamaremos valor verdadero o de verdad de una proposición a su veracidad o falsedad. El valor de verdad de una proposición verdadera es verdad y el de una proposición falsa es falso.

Ejemplo 1.3 Dígase cuáles de las siguientes afirmaciones son proposiciones y determinar el valor de verdad de aquellas que lo sean.

(a) p: Existe Premio Nobel de informática.

(b) q: La tierra es el único planeta del Universo que tiene vida.

(c) r: Teclee Escape para salir de la aplicación.

(d) s: Cinco más siete es grande.

Solución

(a) p es una proposición falsa, es decir su *valor de verdad* es Falso.

(b) No sabemos si q es una proposición ya que desconocemos si esta afirmación es verdadera o falsa.

(c) r no es una proposición ya que no es verdadera ni es falsa. Es un mandato.

(d) s no es una proposición ya que su enunciado, al carecer de contexto, es ambiguo. En efecto, cinco niñas más siete niños es un número grande de hijos en una familia, sin embargo cinco monedas de cinco cinco céntimos más siete monedas de un céntimo no constituyen una cantidad de dinero grande.

1.1.3 Proposición Compuesta

Si las proposiciones simples $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se combinan para formar la proposición P, diremos que P la es una proposición compuesta de $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Ejemplo 1.4 *"La Matemática Discreta es mi asignatura preferida y Mozart fue un gran compositor"* es una proposición compuesta por las proposiciones *"La Matemática Discreta es mi asignatura preferida"* y *"Mozart fue un gran compositor"*.

"El es inteligente o estudia todos los días" es una proposición compuesta por dos proposiciones: *"El es inteligente"* y *"El estudia todos los días"*.

Nota 1.2 La propiedad fundamental de una proposición compuesta es que su *valor de verdad* está completamente determinado por los *valores de verdad* de las proposiciones que la componen junto con la forma en que están conectadas.

1.1.4 Variables de Enunciado

Es una proposición arbitraria con un valor de verdad no especificado, es decir, puede ser verdad o falsa.

En el cálculo lógico, prescindiremos de los contenidos de los enunciados y los sustituiremos por *variables de enunciado*. Toda variable de enunciado p, puede ser sustituida por cualquier enunciado siendo sus posibles estados, verdadero o falso. El conjunto de los posibles valores de una proposición p, los representaremos en las llamadas *tablas de verdad*, ideadas por L.Wittgenstein[1].

[1] *Ludwig Wittgenstein* (Viena 1889-Cambridge 1951), nacionalizado británico en 1938. Estudió Ingeniería Mecánica en

1.1.5 Tablas de Verdad

La tabla de verdad de una proposición compuesta P enumera todas las posibles combinaciones de los valores de verdad para las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Ejemplo 1.5 Por ejemplo, si P es una proposición compuesta por las proposiciones simples p_1, p_2 y p_3, entonces la tabla de verdad de P deberá recoger los siguientes valores de verdad.

p_1	p_2	p_3
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

1.2 Conexión entre Proposiciones

Estudiamos en este apartado las distintas formas de conectar proposiciones entre sí. Prestaremos especial atención a las tablas de verdad de las proposiciones compuestas que pueden formarse utilizando las distintas conexiones.

1.2.1 Conjunción

Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, llamaremos conjunción de ambas a la proposición compuesta "p y q" y la notaremos $p \wedge q$. Esta proposición será verdadera únicamente en el caso de que ambas proposiciones lo sean.

Obsérvese que de la definición dada se sigue directamente que si p y q son, ambas, verdaderas entonces $p \wedge q$ es verdad y que si al menos una de las dos es falsa, entonces $p \wedge q$ es falsa. Por lo tanto su *tabla de verdad* vendrá dada por

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Obsérvese también que el razonamiento puede hacerse a la inversa, es decir si $p \wedge q$ es verdad, entonces p y q son, ambas, verdad y que si $p \wedge q$ es falsa, entonces una de las dos ha de ser falsa. ■

Berlin, posteriormente investigó Aeronáutica en Manchester. La necesidad de entender mejor las matemáticas lo llevó a estudiar sus fundamentos. Dejó Manchester en 1811 para estudiar lógica matemática con Russell en Cambridge. Escribió su primer gran trabajo en lógica, *Tractatus logico-philosophicus*, durante la primera guerra mundial, primero en el frente ruso y luego en el norte de Italia. Envió el manuscrito a Russell desde un campo de prisioneros en Italia. Liberado en 1919, regaló la fortuna que había heredado de su familia y trabajó en Austria como profesor en una escuela primaria. Volvió a Cambridge en 1929 y fue profesor en esta universidad hasta 1947, año en que renunció. Su segundo gran trabajo, *Investigaciones filosóficas* fue publicado en 1953, es decir, dos años después de su muerte. Otras obras póstumas de Wittgenstein son: *Observaciones filosóficas sobre los principios de la matemática*(1956), *Cuadernos azul y marrón*(1958) y *Lecciones y conversaciones sobre estética, sicología y fe religiosa*(1966).

1.2.2 Disyunción

Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, llamaremos disyunción de ambas a la proposición compuesta "p ó q" y la notaremos $p \vee q$. Esta proposición será verdadera si al menos una de las dos p ó q lo es.

De acuerdo con la definición dada se sigue que si una de las dos, p ó q, es verdad entonces $p \vee q$ es verdad y que $p \vee q$ será falsa, únicamente si ambas lo son. Su *tabla de verdad* será, por tanto,

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Al igual que en la conjunción, podemos razonar en sentido inverso. En efecto, si $p \vee q$ es verdad, entonces una de las dos, al menos, ha de ser verdad y si $p \vee q$ es falsa, entonces ambas han de ser falsas.

La palabra "o" se usa en el lenguaje ordinario de dos formas distintas. A veces se utiliza en el sentido de "p ó q, ó ambos", es decir, al menos una de las dos alternativas ocurre y, a veces es usada en el sentido de "p ó q, pero no ambos" es decir, ocurre exactamente una de de las dos alternativas.

Por ejemplo, la proposición "El irá a Madrid o a Bilbao" usa "o" con el último sentido. A este tipo de disyunción la llamaremos *disyunción exclusiva*.

1.2.3 Disyunción Exclusiva

Dadas dos proposiciones cualesquiera p y q, llamaremos disyunción exclusiva de ambas a la proposición compuesta "p ó q pero no ambos" y la notaremos $p \veebar q$. Esta proposición será verdadera si una u otra, pero no ambas son verdaderas.

Según esta definición una disyunción exclusiva de dos proposiciones p y q será verdadera cuando tengan distintos valores de verdad y falsa cuando sus valores de verdad sean iguales. Su *tabla de verdad* es, por tanto,

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Haciendo el razonamiento contrario si $p \veebar q$ es verdad, únicamente podemos asegurar que una de las dos es verdad y si $p \veebar q$ es falsa, sólo podemos deducir que ambas tienen el mismo valor de verdad.

Nota 1.3 Salvo que especifiquemos lo contrario, "o" será usado en el primero de los sentidos. Esta discusión pone de manifiesto la precisión que ganamos con el lenguaje simbólico: $p \vee q$ está definida por su tabla de verdad y *siempre* significa p y/ó q.

1.2.4 Negación

Dada una proposición cualquiera, p, llamaremos "negación de p" a la proposición "no p" y la notaremos $\neg p$. Será verdadera cuando p sea falsa y falsa cuando p sea verdadera.

La *tabla de verdad* de esta nueva proposición, $\neg p$, es:

p	$\neg p$
V	F
F	V

De esta forma, el valor verdadero de la negación de cualquier proposición es siempre opuesto al valor verdadero de la afirmación original.

Ejemplo 1.6 Estudiar la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

p_1: El Pentium es un microprocesador.

p_2: Es falso que el Pentium sea un microprocesador.

p_3: El Pentium no es un microprocesador.

p_4: $2+2=5$

p_5: Es falso que $2+2=5$

p_6: $2+2=4$

Solución

✓ p_2 y p_3 son, cada una, la negación de p_1.

✓ p_5 y p_6 son, cada una, la negación de p_4.

Pues bien, de acuerdo con la tabla de verdad para la negación, tendremos:

✓ p_1 es verdad, luego p_2 y p_3 son falsas.

✓ p_4 es falsa, luego p_5 y p_6 son verdad.

Ejemplo 1.7 Construir la tabla de verdad de la proposición $\neg(p \wedge \neg q)$.

Solución

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg (p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Existen proposiciones que son verdaderas (falsas) simplemente por su forma lógica y no por su contenido.

1.2.5 Tautologías y Contradicciones

Sea P una proposición compuesta de las proposiciones simples $p_1, p_2, \ldots, p_n$

P es una Tautología si es verdadera para todos los valores de verdad que se asignen a $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

P es una Contradicción si es falsa para todos los valores de verdad que se asignen a $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

En adelante, notaremos por "C" a una contradicción y por "T" a una tautología.

Una proposición P que no es tautología ni contradicción se llama, usualmente, *Contingencia*.

Ejemplo 1.8 Probar que la proposición compuesta $p \vee \neg p$ es una tautología y la $p \wedge \neg p$ es una contradicción.

Solución

En efecto:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Obsérvese que $p \vee \neg p$ es verdad, independientemente de quienes sean las variables de enunciado, p y $\neg p$ y lo mismo ocurre con la falsedad de $p \wedge \neg p$. ∎

1.2.6 Proposición Condicional

Dadas dos proposiciones p y q, a la proposición compuesta

"si p, entonces q"

se le llama "proposición condicional" y se nota por

$$p \longrightarrow q$$

A la proposición "p" se le llama hipótesis, antecedente, premisa o condición suficiente y a la "q" tesis, consecuente, conclusión o condición necesaria del condicional. Una proposición condicional es falsa únicamente cuando siendo verdad la hipótesis, la conclusión es falsa (no se debe deducir una conclusión falsa de una hipótesis verdadera).

De acuerdo con esta definición su *tabla de verdad* es,

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Obsérvese que si $p \longrightarrow q$ es verdad no puede deducirse prácticamente nada sobre los valores de verdad de p y q ya que pueden ser ambas verdad, ambas falsas o la primera falsa y la segunda verdad. Ahora bien, si el condicional $p \longrightarrow q$ es falso, entonces podemos asegurar que p es verdadera y q falsa. ∎

Otras *formulaciones equivalentes* de la proposición condicional $p \longrightarrow q$ son:

"*p sólo si q*".

"*q si p*".

"*p es una condición suficiente para q*".

"*q es una condición necesaria para p*".

"*q se sigue de p*".

"*q a condición de p*".

"*q es una consecuencia lógica de p*" .

"*q cuando p*".

Analizaremos con detalle cada uno de los cuatro casos que se presentan en la tabla de verdad.

1. Antecedente y consecuente verdaderos.

   En este caso parece evidente que el condicional "*si p, entonces q*" se evalúe como verdadero. Por ejemplo,

   "*Si como mucho, entonces engordo*"

   es una sentencia que se evalúa como verdadera en el caso de que tanto el antecedente como el consecuente sean verdaderos.

   Ahora bien, obsérvese que ha de evaluarse también como verdadero un condicional en el que no exista una relación de causa entre el antecedente y el consecuente. Por ejemplo, el condicional

   "*Si García Lorca fue un poeta, entonces Gauss fue un matemático*"

   ha de evaluarse como verdadero y no existe relación causal entre el antecedente y el consecuente. Es por esta razón que no hay que confundir el condicional con la *implicación lógica.*

   "*García Lorca fue un poeta implica que Gauss fue un matemático*"

   Es una implicación falsa desde el punto de vista lógico. Más adelante estudiaremos la implicación lógica.

2. Antecedente verdadero y consecuente falso.

   En este caso parece natural decir que el condicional se evalúa como falso. Por ejemplo, supongamos que un político aspirante a Presidente del Gobierno promete:

   "*Si gano las elecciones, entonces bajaré los impuestos*"

   Este condicional será falso sólo si ganando las elecciones, el político no baja los impuestos. A nadie se le ocurriría reprochar al político que no ha bajado los impuestos si no ha ganado las elecciones. Obsérvese que el hecho de que p sea verdadero y, sin embargo, q sea falso viene, en realidad, a refutar la sentencia $p \longrightarrow q$, es decir la hace falsa.

3. Antecedente falso y consecuente verdadero.

   Nuestro sentido común nos indica que el condicional $p \longrightarrow q$ no es, en este caso, ni verdadero ni falso. Parece ilógico preguntarse por la veracidad o falsedad de un condicional cuando la condición expresada por el antecedente no se cumple. Sin embargo, esta respuesta del sentido común no nos sirve, estamos en lógica binaria y todo ha de evaluarse bien como verdadero, bien como falso, es decir, si una sentencia no es verdadera, entonces es falsa y viceversa.

   Veamos que en el caso que nos ocupa, podemos asegurar que el condicional no es falso. En efecto, como dijimos anteriormente, $p \longrightarrow q$ es lo mismo que afirmar que

"p es una condición suficiente para q"

es decir, p no es la única condición posible, por lo cual puede darse el caso de que q sea verdadero siendo p falso. O sea, la falsedad del antecedente no hace falso al condicional y si no lo hace falso, entonces lo hace verdadero. Por ejemplo,

"*Si estudio mucho, entonces me canso*"

¿Qué ocurriría si no estudio y, sin embargo, me cansara? Pues que la sentencia no sería inválida, ya que no se dice que no pueda haber otros motivos que me puedan producir cansancio.

4. Antecedente y consecuente falsos.

   La situación es parecida a la anterior. La condición p no se verifica, es decir, es falsa, por lo que el consecuente q puede ser tanto verdadero como falso y el condicional, al no ser falso, será verdadero.

   Obsérvese, anecdóticamente, que es muy frecuente el uso de este condicional en el lenguaje coloquial, cuando se quiere señalar que, ante un dislate, cualquier otro está justificado.

"*Si tú eres programador, entonces yo soy el dueño de Microsoft*"

Ejemplo 1.9 Sean p, q y r las proposiciones "El número N es par", "La salida va a la pantalla" y "Los resultados se dirigen a la impresora", respectivamente. Enunciar las formulaciones equivalentes de las siguientes proposiciones.

(a) $q \longrightarrow p$.

(b) $\neg q \longrightarrow r$.

(c) $r \longrightarrow (p \vee q)$.

<u>Solución</u>

(a) $q \longrightarrow p$.

- Si la salida va a la pantalla, entonces el número N es par.
- La salida irá a la pantalla, sólo si el número N es par.
- El número N es par si la salida va a la pantalla.
- Una condición suficiente para que el número N sea par es que la salida vaya a la pantalla.
- Una condición necesaria para que la salida vaya a la pantalla es que el número N sea par.

(b) $\neg q \longrightarrow r$.

- Si la salida no va a la pantalla, entonces los resultados se dirigen a la impresora.
- La salida no va a la pantalla sólo si los resultados se dirigen a la impresora.
- Los resultados se dirigen a la impresora si la salida no va a la pantalla.
- Una condición suficiente para que los resultados se dirijan a la impresora es que la salida no vaya a la pantalla.
- Una condición necesaria para que la salida no vaya a la pantalla es que los resultados se dirijan a la impresora.

(c) $r \longrightarrow (p \vee q)$.

- Si los resultados se dirigen a la impresora, entonces el número N es par o la salida va a la pantalla.
- Los resultados se dirigen a la impresora sólo si el número N es par o la salida vaya a la pantalla.

– El número N es par o la salida va a la pantalla si los resultados se dirigen a la impresora.
– Una condición suficiente para que el número N sea par o la salida vaya a la pantalla es que los resultados se dirijan a la impresora.
– Una condición necesaria para que los resultados se dirijan a la impresora es que el número N sea par o que la salida vaya a la pantalla.

Ejemplo 1.10 Sean las proposiciones

p : Está nevando.

q : Iré a la ciudad.

r : Tengo tiempo.

(a) Escribir, usando conectivos lógicos, una proposición que simbolice cada una de las afirmaciones siguientes:

(a.1) Si no está nevando y tengo tiempo, entonces iré a la ciudad.
(a.2) Iré a la ciudad sólo si tengo tiempo.
(a.3) No está nevando.
(a.4) Está nevando, y no iré a la ciudad.

(b) Enunciar las afirmaciones que se corresponden con cada una de las proposiciones siguientes:

(b.1) $q \longleftrightarrow (r \wedge \neg p)$
(b.2) $r \wedge q$
(b.3) $(q \longrightarrow r) \wedge (r \longrightarrow q)$
(b.4) $\neg(r \vee q)$

Solución

(a) Escribimos en forma simbólica las afirmaciones propuestas.

(a.1) $(\neg p \wedge r) \longrightarrow q$
(a.2) $q \longrightarrow r$
(a.3) $\neg p$
(a.4) $p \wedge \neg q$

(b) Escribimos en forma de afirmaciones las proposiciones.

(b.1) Iré a la ciudad si, y sólo si tengo tiempo y no está nevando.
(b.2) Tengo tiempo e iré a la ciudad.
(b.3) Iré a la ciudad si y sólo si tengo tiempo.
(b.4) Ni tengo tiempo, ni iré a la ciudad.

1.2.7 Proposición Recíproca

Dada la proposición condicional $p \longrightarrow q$, su recíproca es la proposición, también condicional, $q \longrightarrow p$.

Por ejemplo, la recíproca de "*Si la salida no va a la pantalla, entonces los resultados se dirigen a la impresora*" será "*Si los resultados se dirigen a la impresora, entonces la salida no va a la pantalla*".

1.2.8 Proposición Contrarrecíproca

Dada la proposición condicional $p \longrightarrow q$, su contrarrecíproca es la proposición, también condicional, $\neg q \longrightarrow \neg p$.

Por ejemplo, la contrarrecíproca de la proposición *"Si María estudia mucho, entonces es buena estudiante"* es *"Si María no es buena estudiante, entonces no estudia mucho"*.

Ejemplo 1.11 Escribir la recíproca y la contrarrecíproca de cada una de las afirmaciones siguientes:

(a) Si llueve, no voy.

(b) Me quedaré, sólo si tú te vas.

(c) Si tienes cien pesetas, entonces puedes comprar un helado.

(d) No puedo completar la respuesta si no me ayudas.

Solución

Escribiremos la recíproca y la contrarrecíproca de varias formas.

(a) Si llueve, no voy.

Recíproca.
- Si no voy, entonces llueve.
- Llueve si no voy.
- Una condición necesaria para no ir es que llueva.
- Una condición suficiente para que llueva es no ir.

Contrarrecíproca.
- Si voy, entonces no llueve.
- Voy sólo si no llueve.
- Es necesario que no llueva, para que vaya.
- Es suficiente que vaya para que no llueva.

(b) Me quedaré sólo si te vas.

Recíproca.
- Si te vas, entonces me quedaré.
- Me quedaré, si te vas.
- Una condición necesaria para que te vayas, es quedarme.
- Una condición suficiente para quedarme es que te vayas.

Contrarrecíproca.
- Si no te vas, entonces no me quedaré.
- No me quedaré si no te vas.
- Es suficiente que no te vayas, para no quedarme.

(c) No puedo completar la respuesta si no me ayudas.

Recíproca.
- Si no puedo completar la respuesta, entonces no me ayudas.

Contrarrecíproca.
- Si puedo completar la respuesta, entonces me ayudas.
- Puedo completar la respuesta sólo si me ayudas.
- Es necesario que ayudes para poder completar la respuesta.

1.2.9 Proposición bicondicional

Dadas dos proposiciones p y q, a la proposición compuesta

$$\text{“}p \text{ si y sólo si } q\text{”}$$

se le llama “proposición bicondicional” y se nota por

$$p \longleftrightarrow q$$

La interpretación del enunciado es:

$$p \text{ sólo si } q \text{ y } p \text{ si } q$$

o lo que es igual

$$\text{si } p, \text{ entonces } q \text{ y si } q, \text{ entonces } p$$

es decir,

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$$

Por tanto, su *tabla de verdad* es:

p	q	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Luego la proposición bicondicional $p \longleftrightarrow q$ es verdadera únicamente en caso de que ambas proposiciones, p y q, tengan los mismos valores de verdad.

Nota 1.4 Obsérvese que la proposición condicional $p \longrightarrow q$, se enunciaba

Si p, entonces q

siendo una formulación equivalente,

Una condición necesaria para p es q

y la proposición condicional $q \longrightarrow p$, se enunciaba

Si q, entonces p

siendo una formulación equivalente,

Una condición suficiente para p es q

Por tanto, una formulación equivalente de la proposición bicondicional en estos términos, sería:

Una condición necesaria y suficiente para p es q

Ejemplo 1.12 Sean $a,\ b$ y c las longitudes de los lados de un triángulo T siendo c la longitud mayor. El enunciado

$$T \text{ es rectángulo si, y sólo si } a^2 + b^2 = c^2$$

puede expresarse simbólicamente como

$$p \longleftrightarrow q$$

donde p es la proposición "T es rectángulo" y q la proposición "$a^2 + b^2 = c^2$".

Observemos lo siguiente: La proposición anterior afirma dos cosas

1. Si T es rectángulo, entonces $a^2 + b^2 = c^2$
   o también,
   Una condición necesaria para que T sea rectángulo es que $a^2 + b^2 = c^2$
2. Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces T es rectángulo
   o también,
   Una condición suficiente para que T sea rectángulo es que $a^2 + b^2 = c^2$

Consecuentemente, una forma alternativa de formular la proposición dada es

Una condición necesaria y suficiente para que T sea rectángulo es que $a^2 + b^2 = c^2$

Nota 1.5 Los valores de verdad de una proposición compuesta, pueden determinarse a menudo, construyendo una *tabla de verdad abreviada*. Por ejemplo, si queremos probar que una proposición es una contingencia, es suficiente con que consideremos dos líneas de su tabla de verdad, una que haga que la proposición sea verdad y otra que la haga falsa. Para determinar si una proposición es una tautología, bastaría considerar, únicamente, aquellas líneas para las cuales la proposición pueda ser falsa.

Ejemplo 1.13 Consideremos el problema de determinar si la proposición $(p \wedge q) \longrightarrow p$ es una tautología.

Solución

Construimos su tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longrightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Luego, en efecto, $(p \wedge q) \longrightarrow p$ es una tautología.

Observemos ahora lo siguiente: Una proposición condicional sólo puede ser falsa en caso de que siendo la hipótesis verdadera, la conclusión sea falsa, por tanto si queremos ver si $(p \wedge q) \longrightarrow p$ es una tautología, bastaría comprobar los casos en que $p \wedge q$ sea verdad, ya que si es falsa, entonces $(p \wedge q) \longrightarrow p$ es verdad, consecuentemente una *tabla de verdad abreviada* para este ejercicio sería:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longrightarrow p$
V	V	V	V

Ejemplo 1.14 Establecer si las siguientes proposiciones son tautologías, contingencias o contradicciones.

(a) $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

(b) $[p \wedge (q \vee r)] \longrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

(c) $(p \vee \neg q) \longrightarrow q$

(d) $p \longrightarrow (p \vee q)$

(e) $(p \wedge q) \longrightarrow p$

(f) $[(p \wedge q) \longleftrightarrow p] \longrightarrow (p \longleftrightarrow q)$

(g) $[(p \longrightarrow q) \vee (r \longrightarrow s)] \longrightarrow [(p \vee r) \longrightarrow (q \vee s)]$

Solución

(a) $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

p	q	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Luego es una *contingencia*.

(b) $[p \wedge (q \vee r)] \longrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

Haremos una *tabla de verdad abreviada*. La proposición condicional sólo es falsa cuando siendo verdad la hipótesis, la conclusión es falsa. Ahora bien, la hipótesis es verdad cuando lo sean, a un tiempo, p y $q \vee r$ y ésta es verdad si, al menos, una de las dos q o r lo es, entonces

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\longrightarrow$
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V

Por tanto, la proposición es una *tautología*.

(c) $(p \vee \neg q) \longrightarrow q$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \longrightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

luego la proposición es una *contingencia*.

(d) $p \longrightarrow (p \vee q)$

Esta proposición será falsa únicamente cuando siendo verdad p, $p \vee q$ sea falsa, pero si p es verdad, entonces $p \vee q$ es verdad independientemente del valor de verdad de q, luego una *tabla de verdad abreviada* será

p	$p \vee q$	$p \longrightarrow (p \vee q)$
V	V	V

y la proposición es una *tautología*.

(e) $(p \wedge q) \longrightarrow p$

Haremos una *tabla de verdad abreviada*. la proposición condicional, únicamente, es falsa cuando siendo $p \wedge q$ verdad, la conclusión p es falsa, pero $p \wedge q$ es verdad, únicamente, cuando ambas, p y q, lo son, luego,

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longrightarrow p$
V	V	V	V

es decir, la proposición es una *tautología*.

(f) $[(p \wedge q) \longleftrightarrow p] \longrightarrow (p \longleftrightarrow q)$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longleftrightarrow p$	$p \longleftrightarrow q$	$[(p \wedge q) \longleftrightarrow p] \longrightarrow (p \longleftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V

luego la proposición es una *contingencia*.

(g) $[(p \longrightarrow q) \vee (r \longrightarrow s)] \longrightarrow [(p \vee r) \longrightarrow (q \vee s)]$

La proposición condicional únicamente es falsa cuando siendo verdad la hipótesis es falsa la conclusión. Por el mismo argumento $(p \vee r) \longrightarrow (q \vee s)$ es falsa cuando siendo $p \vee r$ verdad sea $q \vee s$ sea falsa, y ésta es falsa cuando ambas, q y s, lo son.

Ahora bien, para que la conclusión $(p \vee r) \longrightarrow (q \vee s)$ sea falsa, y utilizando el mismo argumento, $p \vee r$ ha de ser verdad y $q \vee s$ falsa, luego p y r han de ser una de las dos, al menos, verdad mientras q y s han de ser, las dos, falsas.

Haremos, pues, una *tabla de verdad abreviada* que recoja únicamente estos casos.

p	q	r	s	$(p \longrightarrow q) \vee (r \longrightarrow s)$	$(p \vee r) \longrightarrow (q \vee s)$	$\longrightarrow$
V	F	V	F	$(F)\ F\ (F)$	$(V)\ F\ (F)$	V
V	F	F	F	$(F)\ V\ (V)$	$(V)\ F\ (F)$	F
F	F	V	F	$(V)\ V\ (F)$	$(V)\ F\ (F)$	F

y, consecuentemente, la proposición es una *contingencia*.

1.3 Implicación

Estudiamos en este apartado la implicación lógica entre dos proposiciones.

1.3.1 Implicación Lógica

Se dice que la proposición P implica lógicamente la proposición Q, y se escribe $P \Longrightarrow Q$, si Q es verdad cuando P es verdad.

Obsérvese que esto es equivalente a decir que $P \Longrightarrow Q$ es falso si P es falso cuando Q es falso, ya que si P es verdad siendo Q falso, no se cumpliría la definición anterior.

Ejemplo 1.15 Dadas las proposiciones p y q, demostrar que la negación de p ó q implica lógicamente la negación de p.

Solución

Lo que se pide es probar que $\neg(p \vee q) \Longrightarrow \neg p$, es decir si cada vez que $\neg(p \vee q)$ es verdad, $\neg p$ también lo es. En efecto, si $\neg(p \vee q)$ es verdad, entonces $p \vee q$ es falso, de aquí que p sea falso y, consecuentemente, $\neg p$ sea verdad.

También podemos decir que si $\neg p$ es falso, entonces p es verdad, luego $p \vee q$ es verdad (cualquiera que sea el valor de verdad de q) y, por lo tanto, $\neg(p \vee q)$ es falso.

Nota 1.6 Ahora podremos entender algo mejor lo que comentábamos en 1. de 1.2.6. En efecto, de que "García Lorca fue un poeta" sea verdad no puede deducirse que Gauss fuera matemático, aunque lo fue y muy bueno.

De todas formas, es cierto que existe una semejanza entre el símbolo $\Longrightarrow$ para la implicación lógica y el símbolo $\longrightarrow$ para la proposición condicional. Esta semejanza es intencionada y debido a la manera en que se usa el término *implica*, en el lenguaje ordinario es natural leer $p \longrightarrow q$ como *"p implica q"*. El siguiente teorema justifica este proceder.

1.3.2 Implicación Lógica y Proposición Condicional

La proposición P implica lógicamente la proposición Q si, y sólo si la proposición condicional $P \longrightarrow Q$ es una tautología.

Demostración

Veamos que $P \Longrightarrow Q$ *sólo si* $P \longrightarrow Q$ es una tautología.

En efecto, supongamos que P *implica lógicamente* Q. Entonces, de acuerdo con la definición, cuando P es verdad, Q también lo es y cuando Q es falso, P es falso, por tanto, la tabla de verdad de $P \longrightarrow Q$ conteniendo únicamente estas opciones es:

P	Q	$P \longrightarrow Q$
V	V	V
F	F	V

es decir, $P \longrightarrow Q$ es una tautología.

Recíprocamente, veamos que $P \Longrightarrow Q$ *si* $P \longrightarrow Q$ es una tautología.

En efecto, si P es verdad y $P \longrightarrow Q$ es una tautología entonces Q ha de ser verdad.

También podríamos haber dicho que si Q es falso y $P \longrightarrow Q$ es una tautología, entonces P ha de ser falso.

Debido a este teorema, los lógicos prefieren adoptar el lenguaje común como el lenguaje de la lógica y leen $p \longrightarrow q$ como "p implica q". En este caso, ellos utilizan la palabra implica como el nombre de un conectivo lógico y como el nombre de una relación paralela entre proposiciones.

Nota 1.7 Resolvemos ahora el ejemplo anterior viendo que $\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg p$ es una tautología. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V

luego, $\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg p$ es, efectivamente, una tautología. ∎

1.3.3 Implicaciones Lógicas más Comunes

La tabla siguiente presenta algunas implicaciones lógicas con los nombres que usualmente reciben.

✓ *Adición.*

$$P \Longrightarrow (P \vee Q)$$

✓ *Simplificación.*

$$(P \wedge Q) \Longrightarrow P$$

✓ *Ley del Modus Ponendo Ponens (Modus Ponens). Dado un condicional y afirmando ("Ponendo") el antecedente, se puede afirmar ("Ponens") el consecuente.*

$$[(P \longrightarrow Q) \wedge P] \Longrightarrow Q$$

✓ *Ley del Modus Tollendo Tollens (Modus Tollens). Dado un condicional y negando ("Tollendo") el consecuente, se puede negar ("Tollens") el antecedente.*

$$[(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q] \Longrightarrow \neg P$$

✓ *Leyes de los Silogismos Hipotéticos.*

$$[(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \longrightarrow R)$$
$$[(P \longleftrightarrow Q) \wedge (Q \longleftrightarrow R)] \Longrightarrow (P \longleftrightarrow R)$$

✓ *Leyes de los silogismos disyuntivos.*

$$[\neg P \wedge (P \vee Q)] \Longrightarrow Q$$
$$[P \wedge (\neg P \vee \neg Q] \Longrightarrow \neg Q$$

✓ *Ley del Dilema Constructivo.*

$$[(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longrightarrow S) \wedge (P \vee R)] \Longrightarrow (Q \vee S)$$

✓ *Contradicción.*

$$(P \longrightarrow C) \Longrightarrow \neg P$$

Ejemplo 1.16 Verificar las leyes de los silogismos disyuntivos.

Solución

(a) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Longrightarrow Q$. En efecto, si $\neg P \wedge (P \vee Q)$ es verdad, entonces $\neg P$ es verdad y $P \vee Q$ es verdad, de aquí que P sea falso y $P \vee Q$ verdad, por lo tanto, Q ha de ser verdad.

También, si hacemos la tabla de verdad del condicional $\neg P \wedge (P \vee Q) \longrightarrow Q$,

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg P \wedge (P \vee Q)$	$\neg P \wedge (P \vee Q) \longrightarrow Q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

observamos que es una tautología luego por el teorema 1.3.2 $\neg P \wedge (P \vee Q)$ implica lógicamente $\neg Q$.

(b) $[P \wedge (\neg P \vee \neg Q)] \Longrightarrow \neg Q$. En efecto, si $P \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ es verdad, entonces P y $\neg P \vee \neg Q$ son verdad, luego $\neg P$ es falso y $\neg P \vee \neg Q$ verdad, por lo tanto, $\neg Q$ es verdad.

También, haciendo una tabla de verdad igual que en el apartado anterior.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge (\neg P \vee \neg Q)$	$P \wedge (\neg P \vee \neg Q) \longrightarrow Q$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V

se observa que $P \wedge (\neg P \vee \neg Q) \longrightarrow \neg Q$ es una tautología luego, por 1.3.2, $P \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Longrightarrow \neg Q$ ■

Ejemplo 1.17 Demostrar la implicación lógica $(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q \Longrightarrow \neg P$ (Ley del Modus Tollendo Tollens).

Solución

Veamos que $\neg P$ es verdad cuando $(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q$ es verdad.

En efecto, si $(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q$ es verdad, entonces $P \longrightarrow Q$ ha se ser verdad y $\neg Q$ también, luego $P \longrightarrow Q$ es verdad y Q es falso de aquí que P tenga que ser falso y, consecuentemente, $\neg P$ verdad.

Otra forma de hacerlo sería razonar en la forma siguiente: si $\neg P$ es falso, entonces P es verdad y pueden ocurrir dos cosas,

– si Q es verdad, entonces $P \longrightarrow Q$ es verdad, $\neg Q$ falso y, por lo tanto, $(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q$ es falso.

– si Q es falso, entonces $P \longrightarrow Q$ es falso, $\neg Q$ verdad y, por lo tanto, $(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q$ es falso.

Es decir, en ambos casos, $(P \longrightarrow Q) \wedge \neg Q$ es falso. ■

1.4 Equivalencia Lógica

1.4.1 Proposiciones Lógicamente Equivalentes

Las proposiciones compuestas P y Q son lógicamente equivalentes y se escribe $P \equiv Q$ ó $P \Longleftrightarrow Q$ cuando ambas tienen los mismos valores de verdad.

Obsérvese que de esta definición se sigue que para probar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes hay que probar que si P es verdad, Q también ha de serlo y que si P es falso, Q tiene que ser falso.

Obsérvese también que otra forma de demostrar lo mismo es probar que P es verdad partiendo de que Q lo es y probar que si Q es falso, entonces P también lo es. ■

Ejemplo 1.18 Demostrar las Leyes de De Morgan. [2]

(a) $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

(b) $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Solución

(a) $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

En efecto, si $\neg(p \vee q)$ es verdad, entonces $p \vee q$ es falso luego p y q son, ambas, falsas y, por lo tanto, $\neg p$ es verdad y $\neg q$ es verdad. Consecuentemente, $\neg p \wedge \neg q$ es verdad.

Por otra parte, si $\neg(p \vee q)$ es falso, entonces $p \vee q$ es verdad luego una de las dos proposiciones ha de ser verdad y su negación falsa, luego $\neg p \wedge \neg q$ es, en cualquier caso, falso.

(b) $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$

En efecto, si $\neg(p \wedge q)$ es verdad, entonces $p \wedge q$ es falso luego una de las dos proposiciones ha de ser falsa y su negación verdad, luego $\neg p \vee \neg q$ es verdad en cualquiera de los casos.

Por otra parte, si $\neg(p \wedge q)$ es falso, entonces $p \wedge q$ es verdad, luego p es verdad y q es verdad, de aquí que $\neg p$ y $\neg q$ sean, ambas, falsas y, consecuentemente, $\neg p \vee \neg q$ sea falso. ∎

1.4.2 Equivalencia Lógica y Proposición Bicondicional

La proposición P es lógicamente equivalente a la proposición Q si, y sólo si la proposición bicondicional $P \longleftrightarrow Q$ es una tautología.

Demostración

Veamos que $P \Longleftrightarrow Q$ *sólo si* $P \longleftrightarrow Q$ es una tautología.

En efecto, si $P \Longleftrightarrow Q$, entonces tienen los mismos valores de verdad, es decir P y Q son, ambos, verdaderos o falsos, de aquí que el valor de verdad de $P \longleftrightarrow Q$ sea siempre verdadero, es decir es una tautología.

Recíprocamente, probemos que $P \Longleftrightarrow Q$ *si* $P \longleftrightarrow Q$ es una tautología.

Efectivamente, si la proposición bicondicional $P \longleftrightarrow Q$ es siempre verdadera, entonces de acuerdo con su definición, P y Q son, ambas, falsas o verdaderas, es decir tienen los mismos valores de verdad y, por tanto, P es lógicamente equivalente a Q. ∎

[2] Augustus De Morgan (Madras 1806-Londres 1871). Nació en la India, donde su padre trabajaba en la *East India Company*, aunque realizó sus estudios en el Trinity College, donde obtuvo el grado de cuarto *wrangler*. Al negarse a pasar el indispensable examen religioso no consiguió plaza en Cambridge ni en Oxford, a pesar de haber sido educado en la Iglesia de Inglaterra, en la que su madre esperaba que se hiciese pastor. A consecuencia de ello, De Morgan se vio nombrado profesor de matemáticas, a la temprana edad de 22 años, en la recién creada Universidad de Londres, más tarde University College de la misma universidad, donde enseño de manera continua, excepto durante breves períodos a consecuencias de sucesivas dimisiones provocadas por casos de reducción de la libertad académica. De Morgan fue siempre un defensor de la tolerancia intelectual y religiosa, así como un profesor y escritor excepcional. Era ciego de un ojo, de nacimiento, lo cual puede explicar algunas de sus inofensivas excentricidades, tales como su odio a la vida rural, su negativa a votar en las elecciones y su renuncia a solicitar el ingreso en la Royal Society. A De Morgan le encantaban los acertijos, rompecabezas y problemas ingeniosos, muchos de los cuales aparecen coleccionados en su libro *Budget of Paradoxes*, que es una deliciosa sátira sobre los cuadradores del círculo publicada después de su muerte por su viuda. De Morgan fue uno de los precursores de la lógica matemática y en 1847 publicó *Lógica formal o el cálculo de inferencia*.

Nota 1.8 En el ejemplo anterior vimos que $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$, luego este teorema afirma que la proposición bicondicional $\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$ es una tautología. Veamos que es cierto. En efecto,

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

1.4.3 Equivalencias Lógicas más Comunes

Al igual que en la implicación lógica, veamos una tabla con las equivalencias lógicas más útiles junto con los nombres que reciben.

✓ *Idempotencia de la conjunción y la disyunción.*

$$(P \wedge P) \Longleftrightarrow P$$
$$(P \vee P) \Longleftrightarrow P$$

✓ *Conmutatividad de la conjunción y la disyunción.*

$$(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (Q \wedge P)$$
$$(P \vee Q) \Longleftrightarrow (Q \vee P)$$

✓ *Asociatividad de la conjunción y la disyunción. .*

$$[(P \wedge Q) \wedge R] \Longleftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$$
$$[(P \vee Q) \vee R] \Longleftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$$

✓ *Distributividad de $\wedge$ respecto de $\vee$ y de $\vee$ respecto de $\wedge$.*

$$[P \wedge (Q \vee R)] \Longleftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$$
$$[P \vee (Q \wedge R)] \Longleftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$$

✓ *Leyes de De Morgan.*

$$\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$$
$$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$$

✓ *Leyes de dominación.*

$$P \vee T \Longleftrightarrow T$$
$$P \wedge C \Longleftrightarrow C$$

✓ *Leyes de identidad.*

$$P \wedge T \Longleftrightarrow P$$
$$P \vee C \Longleftrightarrow P$$

✓ *Doble negación.*

$$\neg\neg P \Longleftrightarrow P$$

✓ *Implicación.*

$$(P \longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

✓ *Exportación.*

$$[P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)] \Longleftrightarrow [(P \wedge Q) \longrightarrow R]$$

✓ *Contrarrecíproca.*

$$(P \longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \longrightarrow \neg P)$$

✓ *Reducción al absurdo.*

$$(P \longrightarrow Q) \Longleftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \longrightarrow C]$$

Ejemplo 1.19 Probar que la proposición condicional $P \longrightarrow Q$ es lógicamente equivalente a su contrarrecíproca $\neg Q \longrightarrow \neg P$.

Solución

Veamos que ambos condicionales tienen los mismos valores de verdad. En efecto, si $P \longrightarrow Q$ es verdad, entonces P puede ser verdad o falso. Pues bien,

– si P es verdad, q ha de ser verdad, luego $\neg P$ y $\neg Q$ son, ambas, falsas y, consecuentemente, $\neg Q \longrightarrow \neg P$ es verdad.

– si P es falso, entonces $\neg P$ es verdad y $\neg Q \longrightarrow \neg P$ es verdad, cualquiera que sea el valor de verdad de Q.

Por lo tanto, en cualquier caso, $\neg Q \longrightarrow \neg P$ es verdad.

Por otra parte, si $P \longrightarrow Q$ es falso, entonces P es verdad y Q es falso, luego $\neg Q$ es verdad y $\neg P$ es falso y, por lo tanto, $\neg Q \longrightarrow \neg P$ es falso.

También podemos hacerlo escribiendo su tabla de verdad.

P	Q	$P \longrightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \longrightarrow \neg P$	$(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg Q \longrightarrow \neg P)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Entonces, el bicondicional $(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg Q \longrightarrow \neg P)$ es una tautología y por 1.4.2 es una equivalencia lógica.

Ejemplo 1.20 Probar la equivalencia lógica conocida como reducción al absurdo.

Solución

Lo demostraremos partiendo de la segunda proposición, el razonamiento es más sencillo y rápido. En efecto,

si $(P \wedge \neg Q) \longrightarrow C$ es verdad, entonces $P \wedge \neg Q$ ha de ser falso luego P y $\neg Q$ son, ambas, falsas de aquí que Q sea verdad y $P \longrightarrow Q$ también.

Por otra parte, si $(P \wedge \neg Q) \longrightarrow C$ es falso, entonces $P \wedge \neg Q$ ha de ser verdad (C siempre es falso) luego P es verdad y $\neg Q$ también, de aquí que Q sea falso y $P \longrightarrow Q$ sea falso.

Ahora lo haremos comprobando, mediante su tabla de verdad, que la proposición bicondicional correspondiente, $(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \longrightarrow C]$, es una tautología.

En efecto,

P	Q	$P \longrightarrow Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	C	$(P \wedge \neg Q) \longrightarrow C$	$(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \longrightarrow C]$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V

Por tanto, y según 1.4.2,

$$(P \longrightarrow Q) \Longleftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \longrightarrow C]$$

Ejemplo 1.21 Demostrar que $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

Solución

En efecto,

$$\begin{aligned}
\neg(p \wedge q) &\iff \neg p \vee \neg q && \{\text{De Morgan}\}\\
&\iff (\neg p \wedge T) \vee (\neg q \wedge T) && \{\text{Identidad}\}\\
&\iff (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg q \wedge (p \vee \neg p)) && \{\text{Tautología}\}\\
&\iff (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg p) && \{\text{Distributividad}\}\\
&\iff (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \{\text{Commutatividad}\}\\
&\iff (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \{\text{Idempotencia}\}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.22 Establecer las siguientes equivalencias simplificando las proposiciones del lado izquierdo.

(a) $[(p \wedge q) \longrightarrow p] \iff T$

(b) $\neg(\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg p) \iff C$

(c) $[(q \longrightarrow p) \wedge (\neg p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow q)] \iff p$

(d) $[(p \longrightarrow \neg p) \wedge (\neg p \longrightarrow p)] \iff C$

siendo C una contradicción y T una tautología.

Solución

(a) $[(p \wedge q) \longrightarrow p] \iff T$

$$\begin{aligned}
[(p \wedge q) \longrightarrow p] &\iff \neg(p \wedge q) \vee p && \{\text{Implicación}\}\\
&\iff (\neg p \vee \neg q) \vee p && \{\text{De Morgan}\}\\
&\iff p \vee (\neg p \vee \neg q) && \{\text{Conmutatividad de } \vee\}\\
&\iff (p \vee \neg p) \vee \neg q && \{\text{Asociatividad de } \vee\}\\
&\iff T \vee \neg q && \{\text{Leyes de dominación}\}\\
&\iff T
\end{aligned}$$

(b) $\neg(\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg p) \iff C$

$$\begin{aligned}
\neg(\neg(p \vee q) \longrightarrow \neg p) &\iff \neg(\neg\neg\,(p \vee q) \vee \neg p) && \{\text{Implicación}\}\\
&\iff \neg((p \vee q) \vee \neg p) && \{\text{Doble negación}\}\\
&\iff \neg(p \vee q) \wedge \neg\neg p && \{\text{De Morgan}\}\\
&\iff (\neg p \wedge \neg q) \wedge p && \{\text{Doble Negación y De Morgan}\}\\
&\iff (\neg q \wedge \neg p) \wedge p && \{\text{Conmutatividad de } \wedge\}\\
&\iff \neg q \wedge (\neg p \wedge p) && \{\text{Asociatividad de } \wedge\}\\
&\iff \neg q \wedge C && \{\text{Leyes de dominación}\}\\
&\iff C
\end{aligned}$$

(c) $[(q \longrightarrow p) \wedge (\neg p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow q)] \Longleftrightarrow p$

$$\begin{aligned}
[(q \longrightarrow p) \wedge (\neg p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow q)] &\Longleftrightarrow (\neg q \vee p) \wedge (\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) && \{\text{Implicación}\} \\
&\Longleftrightarrow (\neg q \vee p) \wedge (p \vee q) \wedge T && \{\text{Tautología}\} \\
&\Longleftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) && \{\text{Conmutatividad}\} \\
&\Longleftrightarrow p \vee (\neg q \wedge q) && \{\text{Distributividad}\} \\
&\Longleftrightarrow p \vee C && \{\text{Identidad}\} \\
&\Longleftrightarrow p
\end{aligned}$$

(d) $[(p \longrightarrow \neg p) \wedge (\neg p \longrightarrow p)] \Longleftrightarrow C$

$$\begin{aligned}
[(p \longrightarrow \neg p) \wedge (\neg p \longrightarrow p)] &\Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg p) \wedge (\neg\neg p \vee p) && \{\text{Implicación}\} \\
&\Longleftrightarrow \neg p \wedge p && \{\text{Idempotencia y doble negación}\} \\
&\Longleftrightarrow C && \{\text{Contradicción}\}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.23 Si $\triangle$ y $\circ$ son dos operadores lógicos, se dice que $\triangle$ es distributivo respecto de $\circ$ si las proposiciones $p\triangle(q \circ r)$ y $(p\triangle q) \circ (p\triangle r)$ son lógicamente equivalentes.

Probar, usando tablas de verdad, que $\wedge$ y $\vee$ son, cada uno, distributivos respecto del otro y que $\longrightarrow$ es distributivo sobre sí mismo.

Solución

(a) Probaremos que $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, para lo cual veremos que la proposición bicondicional correspondiente es una tautología. En efecto,

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\longleftrightarrow$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Por tanto, $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(b) Probaremos ahora que $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, para lo cual veremos que la proposición bicondicional correspondiente es una tautología. En efecto,

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\longleftrightarrow$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Por tanto, $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(c) Probaremos, finalmente, $p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \Longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$, para lo cual veremos que la proposición bicondicional correspondiente es una tautología. En efecto,

p	q	r	$q \longrightarrow r$	$p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$	$p \longrightarrow q$	$p \longrightarrow r$	$(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$	$\longleftrightarrow$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

Por tanto, $p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \Longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$