Universidad de Cádiz
Escuela Superior de Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Apuntes de Matemática Discreta

2. Operaciones con Conjuntos

Francisco José González Gutiérrez

Cádiz, Octubre de 2004

Lección 2

Operaciones con Conjuntos

Contenido

Introduciremos las operaciones con conjuntos que nos van a permitir obtener nuevos conjuntos, partiendo de conjuntos ya conocidos. A y B serán dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario $\mathscr{U}$.

2.1 Definiciones

Definiremos las principales operaciones entre conjuntos.

2.1.1 Unión

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B. Se nota $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

La disyunción, $\vee$, se utiliza en el sentido inclusivo, es decir, significa "y/o".

2.1.2 Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B. Se nota $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Si A y B no tienen elementos en común, es decir, si $A \cap B = \emptyset$, entonces diremos que A y B son conjuntos disjuntos.

Ejemplo 2.1 Sean A, B y C tres conjuntos.

(a) Demostrar que si $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$, entonces $C \subseteq (A \cap B)$, es decir, $A \cap B$ es el mayor conjunto que contiene a A y a B.

(b) Demostrar que si $C \supseteq A$ y $C \supseteq B$, entonces $C \supseteq (A \cup B)$, es decir, $A \cup B$ es el conjunto más pequeño que contiene a A y a B.

<u>Solución</u>

(a) Supongamos que $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$, entonces la proposición

$$\forall x\,(x \in C \Longrightarrow x \in A) \ \wedge\ \forall x\,(x \in C \Longrightarrow x \in B)$$

es verdad. Esta proposición es equivalente a

$$\forall x\,[(x \in C \Longrightarrow x \in A) \ \wedge\ (x \in C \Longrightarrow x \in B)]$$

la cual, a su vez, equivale a

$$\forall x, [\ x \in C \Longrightarrow (x \in A \ \wedge\ x \in B)]$$

de aquí que

$$\forall x,\ x \in C \Longrightarrow x \in [(A \cap B)]$$

y, por lo tanto,

$$C \subseteq A \cap B$$

(b) Supongamos que $C \supseteq A$ y que $C \supseteq B$, y sea x un elemento arbitrario de $A \cup B$ entonces,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) &\iff x \in A \ \vee\ x \in B && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\Longrightarrow x \in C \ \vee x \in C && \{\text{Por hipótesis}\} \\ &\iff x \in C && \{\text{Idempotencia de } \vee\} \end{aligned}$$

luego,

$$\forall x, (x \in A \cup B \Longrightarrow x \in C)$$

de aquí que

$$C \supseteq (A \cup B)$$

2.1.3 Diferencia

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Se nota por $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

El conjunto $A \setminus B$ se lee "A menos B" y recibe también el nombre de complementario relativo del conjunto B respecto del conjunto A.

2.1.4 Complementario

El complementario de un conjunto A es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A. Se nota A^c.

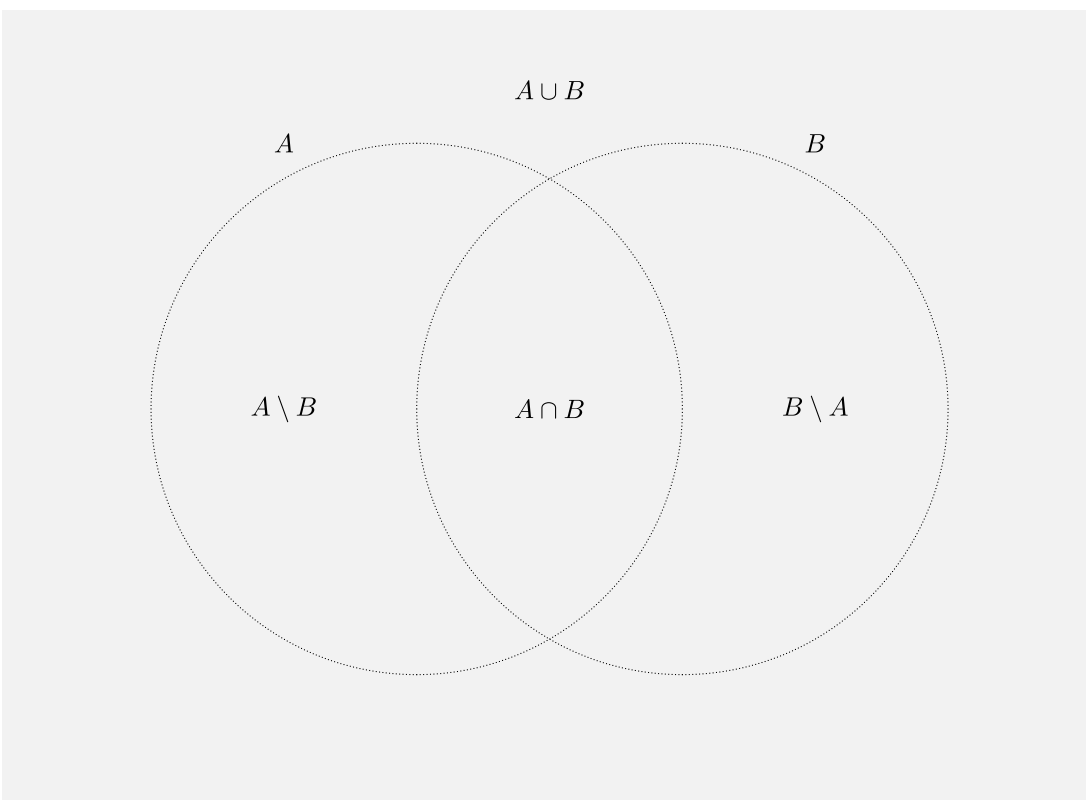
$$A^c = \{x : x \in \mathscr{U} \wedge x \notin A\}$$

Obsérvese que el complementario de A es igual a la diferencia entre $\mathscr{U}$ y A, es decir, $A^c = \mathscr{U} \setminus A$.

2.1.5 Diferencia Simétrica

La diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos. Se nota por $A \triangle B$.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Operaciones con conjuntos

Ejemplo 2.2 Sean los conjuntos

$$
\begin{aligned}
A &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \leqslant 13\} \\
B &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par y } n \leqslant 20\} \\
C &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par}\}
\end{aligned}
$$

Hallar $A \cup B,\ A \cap B,\ A^c,\ B^c,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \triangle B,\ B \cap C$ y $B \setminus C$.

Solución

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \leqslant 13\} \cup \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par y } n \leqslant 20\} \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \leqslant 13\} \cap \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par y } n \leqslant 20\} \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \\
&= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^c &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \notin A\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n > 13\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^c &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \notin B\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : \neg(n \in B)\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : \neg\left[n \text{ es par} \wedge (n \leqslant 20)\right]\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : \neg(n \text{ es par}) \vee \neg(n \leqslant 20)\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : (n \text{ es impar}) \vee (n > 20)\} \\
&= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\} \cup \{21, 22, 23, 24, \ldots\} \\
&= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, \ldots\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \setminus B &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \in A \wedge n \notin B\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \in A \wedge n \in B^c\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \leqslant 13 \wedge n \in B^c\} \\
&= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B \setminus A &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \in B \wedge n \notin A\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \in B \wedge n \in A^c\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par y } n \leqslant 20 \text{ y } n > 13\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par y } 14 \leqslant n \leqslant 20\} \\
&= \{14, 16, 18, 20\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} \cup \{14, 16, 18, 20\} \\
&= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B \cap C &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par y } n \leqslant 20\} \cap \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par}\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par y } n \leqslant 20 \text{ y } n \text{ es par}\} \\
&= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B \setminus C &= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \in B \text{ y } n \notin C\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \text{ es par y } n \leqslant 20 \text{ y } n \text{ es impar}\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

2.2 Algebra de conjuntos. Dualidad

Bajo las operaciones definidas en los apartados anteriores, los conjuntos satisfacen varias leyes o identidades. Observaremos que existe una dualidad entre las leyes que utilizan la intersección y las que utilizan la unión.

2.2.1 Leyes Idempotentes

Dado cualquier conjunto A en un universal arbitrario $\mathscr{U}$, se verifica:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$

Demostración

En efecto, sea x un elemento arbitrario del universal $\mathscr{U}$. Entonces,

1.
$$\begin{aligned} x \in (A \cup A) &\iff x \in A \ \vee \ x \in A && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff x \in A && \{\text{Idempotencia de } \vee\} \end{aligned}$$

   De la arbitrariedad de x se sigue que

$$\forall x \, [x \in (A \cup A) \iff x \in A]$$

   de aquí que

$$A \cup A = A$$

2. Análogamente se prueba que $A \cap A = A$. ∎

2.2.2 Leyes Conmutativas

Dados dos conjuntos A y B de un universal arbitrario $\mathscr{U}$, se verifica:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

Demostración

En efecto,

1. Sea x cualquier elemento de $\mathscr{U}$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) &\iff x \in A \vee \ x \in B && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff x \in B \vee \ x \in A && \{\text{Commutatividad de } \vee\} \\ &\iff x \in (B \cup A) && \{\text{Definición de unión}\} \end{aligned}$$

   Como x es cualquiera de $\mathscr{U}$, se sigue que

$$\forall x \, [x \in A \cup B \iff x \in B \cup A]$$

   por lo tanto,

$$A \cup B = B \cup A$$

2. De una forma similar se demuestra que $A \cap B = B \cap A$. ∎

2.2.3 Leyes Asociativas

Dados tres conjuntos A, B y C de un universal arbitrario, $\mathscr{U}$, se verifica:

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Demostración

En efecto, sea x es un elemento arbitrario de $\mathscr{U}$. Entonces,

1. $$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\iff x \in A \ \vee \ [x \in (B \cup C)] && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff x \in A \ \vee \ (x \in B \ \vee \ x \in C) && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \vee \ x \in C && \{\text{Asociatividad de } \vee\} \\ &\iff (x \in A \cup B) \ \vee \ x \in C && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff x \in (A \cup B) \cup C && \{\text{Definición de unión}\} \end{aligned}$$

   De la arbitrariedad de x se sigue que

   $$\forall x \, [x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cup C]$$

   de aquí que

   $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

2. Análogamente se demuestra que

   $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

■

2.2.4 Leyes Distributivas

Dados tres conjuntos A, B y C de un conjunto universal arbitrario, $\mathscr{U}$, se verifica:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración

En efecto,

1. En efecto, sea x cualquier elemento del conjunto universal $\mathscr{U}$, entonces

   $$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \ \vee \ [x \in (B \cap C)] && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff x \in A \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) && \{\text{Definición de intersección}\} \\ &\iff (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \vee \ x \in C) && \{\text{Distributividad}\} \\ &\iff x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \in (A \cup C) && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) && \{\text{Definición de intersección}\} \end{aligned}$$

   Al ser x cualquier elemento de $\mathscr{U}$, se sigue que

   $$\forall x \, [x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)]$$

consecuentemente,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

2. De una forma similar se prueba que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2.2.5 Leyes de Identidad

Dado un conjunto cualquiera de un universal arbitrario, $\mathscr{U}$, se verifica:

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup \mathscr{U} = \mathscr{U}$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap \mathscr{U} = A$

<u>Demostración</u>

1. $A \cup \emptyset = A$. En efecto, sea x es un elemento arbitrario de $\mathscr{U}$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup \emptyset) &\iff x \in A \ \vee \ x \in \emptyset && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff x \in A && \{x \in \emptyset \text{ es falso siempre}\} \end{aligned}$$

luego,

$$\forall x \, [x \in (A \cup \emptyset) \Longleftrightarrow x \in A]$$

de aquí que

$$A \cup \emptyset = A$$

2. $A \cup \mathscr{U} = \mathscr{U}$. Sea x un elemento cualquiera de $\mathscr{U}$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup \mathscr{U}) &\iff x \in A \ \vee \ x \in \mathscr{U} && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff x \in \mathscr{U} && \{x \in \mathscr{U} \text{ es verdad siempre}\} \end{aligned}$$

luego,

$$\forall x \, [x \in (A \cup \mathscr{U}) \Longleftrightarrow x \in \mathscr{U}]$$

es decir,

$$A \cup \mathscr{U} = \mathscr{U}$$

3. $A \cap \emptyset = \emptyset$. Si x es cualquiera de $\mathscr{U}$, entonces

$$\begin{aligned} x \in (A \cap \emptyset) &\iff x \in A \ \wedge \ x \in \emptyset && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\iff x \in \emptyset && \{x \in \emptyset \text{ es falso siempre}\} \end{aligned}$$

luego,

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

4. $A \cap \mathscr{U} = A$. Sea x un elemento arbitrario de $\mathscr{U}$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in A \cap \mathscr{U} &\iff x \in A \ \wedge \ x \in \mathscr{U} && \{\text{Definición de intersección}\} \\ &\iff x \in A && \{x \in \mathscr{U} \text{ es verdad siempre}\} \end{aligned}$$

luego,

$$A \cap \mathscr{U} = A$$

2.2.6 Ley Involutiva

Dado un conjunto cualquiera A de un universal $\mathscr{U}$, se verifica:

$$(A^c)^c = A$$

Demostración

Sea x cualquiera de $\mathscr{U}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x \in (A^c)^c &\Longleftrightarrow x \notin A^c & \{\text{Definición de complementario}\} \\
&\Longleftrightarrow \neg(x \in A^c) & \{\text{Negación}\} \\
&\Longleftrightarrow \neg(x \notin A) & \{\text{Definición de complementario}\} \\
&\Longleftrightarrow \neg\neg(x \in A) & \{\text{Negación}\} \\
&\Longleftrightarrow x \in A & \{\text{Doble negación}\}
\end{aligned}$$

luego,

$$\forall x \left[x \in (A^c)^c \Longleftrightarrow x \in A\right]$$

es decir,

$$(A^c)^c = A$$

2.2.7 Leyes del Complementario

Dado un conjunto cualquiera A de un universal arbitrario $\mathscr{U}$, se verifica:

1. $A \cup A^c = \mathscr{U}$
2. $\mathscr{U}^c = \emptyset$
3. $A \cap A^c = \emptyset$
4. $\emptyset^c = \mathscr{U}$

Demostración

1. $A \cup A^c = \mathscr{U}$. En efecto, sea x cualquier elemento de $\mathscr{U}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup A^c) &\Longleftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in A^c & \{\text{Definición de unión}\} \\
&\Longleftrightarrow x \in A \ \vee \ x \notin A & \{\text{Complementario}\} \\
&\Longleftrightarrow x \in A \ \vee \ \neg(x \in A) & \{\text{Negación}\} \\
&\Longleftrightarrow x \in \mathscr{U} & \{\text{Tautología}\}
\end{aligned}$$

luego,

$$\forall x \left[x \in (A \cup A^c) \Longleftrightarrow x \in \mathscr{U}\right]$$

por lo tanto,

$$A \cup A^c = \mathscr{U}$$

2. $\mathscr{U}^c = \emptyset$. En efecto,

$$\mathscr{U}^c = \{x \in \mathscr{U} : x \in \mathscr{U}^c\} = \{x \in \mathscr{U} \ \wedge \ x \notin \mathscr{U}\} = \emptyset$$

3. $A \cap A^c = \emptyset$. En efecto,

$$A \cap A^c = \{x \in \mathscr{U} : x \in A \ \wedge \ x \in A^c\} = \{x \in \mathscr{U} : x \in A \ \wedge \ x \notin A\} = \emptyset$$

4. $\emptyset^c = \mathscr{U}$. En efecto,

$$\emptyset^c = \{x \in \mathscr{U} : x \in \emptyset^c\} = \{x \in \mathscr{U} : x \notin \emptyset\} = \{x \in \mathscr{U}\} = \mathscr{U}$$

■

2.2.8 Leyes de De Morgan

Dados dos conjuntos A y B en un universal $\mathscr{U}$, se verifica:

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   En efecto, sea x un elemento arbitrario del conjunto universal $\mathscr{U}$. Entonces,

$$\begin{array}{rcll} x \in (A \cup B)^c & \iff & x \notin (A \cup B) & \{\text{Definición de complementario}\} \\ & \iff & \neg\,[x \in (A \cup B)] & \{\text{Negación}\} \\ & \iff & \neg\,[(x \in A) \vee (x \in B)] & \{\text{Definición de unión}\} \\ & \iff & \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) & \{\text{De Morgan para } \vee\} \\ & \iff & (x \notin A) \wedge (x \notin B) & \{\text{Negación}\} \\ & \iff & (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) & \{\text{Definición de complementario}\} \\ & \iff & x \in (A^c \cap B^c) & \{\text{Definición de intersección}\} \end{array}$$

   y al ser x un elemento arbitrario de $\mathscr{U}$, se sigue que

$$\forall x\, [x \in (A \cup B)^c \iff x \in (A^c \cap B^c)]$$

   luego,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

2. Análogamente se prueba que

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

■

Ejemplo 2.3 Sean A, B, C y D subconjuntos arbitrarios de un conjunto universal arbitrario, $\mathscr{U}$. Entonces,

(a) $A \setminus B \subseteq A$

(b) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

(c) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

(d) $A \subseteq (A \cup B)$

(e) $A \cap B \subseteq A$

(f) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$

(g) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$

(h) $A \setminus \emptyset = A$

(i) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

(j) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

(k) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(l) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

<u>Solución</u>

(a) $A \setminus B \subseteq A$

En efecto, sea x un elemento arbitrario de $\mathscr{U}$,

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\iff x \in A \ \wedge \ x \notin B && \{\text{Definición de diferencia}\} \\ &\Longrightarrow x \in A && \{\text{Simplificación}\} \end{aligned}$$

luego,

$$\forall x\,[x \in A \setminus B \Longrightarrow x \in A]$$

consecuentemente,

$$A \setminus B \subseteq A$$

(b) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

En efecto, supongamos que $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ y sea x un elemento arbitrario de $\mathscr{U}$, entonces

$$\begin{aligned} x \in A \cup C &\iff x \in A \ \vee \ x \in C && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\Longrightarrow x \in B \ \vee \ x \in D && \{\text{Hipótesis}\} \\ &\iff x \in (B \cup D) && \{\text{Definición de unión}\} \end{aligned}$$

luego,

$$\forall x\,[x \in (A \cup C) \Longrightarrow x \in (B \cup D)]$$

por lo tanto,

$$A \cup C \subseteq B \cup D$$

(c) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

Se prueba de forma análoga a la anterior.

(d) $A \subseteq (A \cup B)$

En efecto, si x es cualquiera de $\mathscr{U}$, entonces

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B && \{\text{Adición}\} \\ &\iff x \in A \cup B && \{\text{Definición de unión}\} \end{aligned}$$

luego,

$$\forall x\,[x \in A \Longrightarrow x \in (A \cup B)]$$

de aquí que

$$A \subseteq (A \cup B)$$

(e) $A \cap B \subseteq A$

En efecto, sea x un elemento cualquiera de $A \cap B$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\iff x \in A \ \wedge \ x \in B && \{\text{Definición de intersección}\} \\ &\implies x \in A && \{\text{Simplificación}\} \end{aligned}$$

luego,

$$\forall x \, [x \in (A \cap B) \implies x \in A]$$

de donde se sigue

$$A \cap B \subseteq A$$

(f) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$

En efecto, sea x cualquiera de $\mathscr{U}$ y supongamos que $A \subseteq B$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) &\iff x \in A \ \vee \ x \in B && \{\text{Definición de unión}\} \\ &\implies x \in B \ \vee \ x \in B && \{\text{Hipótesis}\} \\ &\iff x \in B && \{\text{Idempotencia de } \vee\} \end{aligned}$$

luego,

$$\forall x \, [x \in (A \cup B) \implies x \in B]$$

por lo tanto,

$$A \cup B \subseteq B$$

y por (d)

$$B \subseteq (A \cup B)$$

De la doble inclusión se sigue la igualdad que buscamos.

(g) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$

Por el apartado (e), tenemos que

$$A \cap B \subseteq A$$

Veamos la inclusión contraria.

Supongamos que $A \subseteq B$ y sea x un elemento arbitrario de $\mathscr{U}$, entonces

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \in A \ \wedge \ x \in B && \{\text{Hipótesis}\} \\ &\iff x \in (A \cap B) && \{\text{Definición de intersección}\} \end{aligned}$$

luego,

$$\forall x \, [x \in A \implies x \in (A \cap B)]$$

de aquí que

$$A \subseteq (A \cap B)$$

Tenemos, pues, que

$$A \subseteq (A \cap B) \ \text{ y } \ (A \cap B) \subseteq A$$

por lo tanto,

$$A = A \cap B$$

(h) $A \setminus \emptyset = A$

Sea x cualquiera de $\mathscr{U}$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in A \setminus \emptyset &\iff x \in A \ \wedge \ x \notin \emptyset && \{\text{Definición de diferencia}\} \\ &\iff x \in A && \{\text{Por ser } x \notin \emptyset \text{ verdad, siempre}\} \end{aligned}$$

luego,

$$A \setminus \emptyset = \{x : x \in A\} = A$$

(i) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

En efecto,

$$\begin{array}{rcll} A \cap (B \setminus A) & = & A \cap (B \cap A^c) & \{\text{Diferencia de conjuntos}\} \\ & = & A \cap (A^c \cap B) & \{\text{Conmutatividad de la unión}\} \\ & = & (A \cap A^c) \cap B & \{\text{Asociatividad de la intersección}\} \\ & = & \emptyset \cap B & \{\text{Leyes del complementario}\} \\ & = & \emptyset & \{\text{Leyes de identidad}\} \end{array}$$

(j) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

En efecto,

$$\begin{array}{rcll} A \cup (B \setminus A) & = & A \cup (B \cap A^c) & \{\text{Diferencia de conjuntos}\} \\ & = & (A \cup B) \cap (A \cup A^c) & \{\text{Distributividad}\} \\ & = & (A \cup B) \cap \mathscr{U} & \{\text{Leyes del complementario}\} \\ & = & A \cup B & \{\text{Leyes de identidad}\} \end{array}$$

(k) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$$\begin{array}{rcll} A \setminus (B \cup C) & = & A \cap (B \cup C)^c & \{\text{Diferencia de conjuntos}\} \\ & = & A \cap (B^c \cap C^c) & \{\text{De Morgan}\} \\ & = & (A \cap A) \cap (B^c \cap C^c) & \{\text{Idempotencia de la intersección}\} \\ & = & (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) & \{\text{Commutatividad y asociatividad}\} \\ & = & (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & \{\text{Diferencia de conjuntos}\} \end{array}$$

(l) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

La demostración es similar a la del apartado anterior. ■

Ejemplo 2.4 Probar las identidades siguientes:

(a) $A \cup (A \cap B) = A$

(b) $A \cap (A \cup B) = A$

(c) $A \setminus B = A \cap B^c$

(d) $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$

(e) $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

<u>Solución</u>

(a) $A \cup (A \cap B) = A$

Sea x un elemento cualquiera del universal $\mathscr{U}$, entonces

$$\begin{array}{rcll} x \in A \cup (A \cap B) & \Longleftrightarrow & x \in A \ \vee \ x \in (A \cap B) & \{\text{Definición de unión}\} \\ & \Longrightarrow & x \in A & \end{array}$$

luego $\forall x,\ x \in A \cup (A \cap B) \Longrightarrow x \in A$ es decir,

$$A \cup (A \cap B) \subseteq A$$

Por otro lado, siempre se verifica que

$$A \subseteq A \cup X, \ \forall X \in \mathscr{U}$$

en particular,

$$A \subseteq A \cup (A \cap B)$$

De la doble inclusión se sigue el resultado,

$$A = A \cup (A \cap B)$$

(b) $A \cap (A \cup B) = A$

En efecto,

$$\begin{array}{rcll} A \cap (A \cup B) & = & (A \cap A) \cup (A \cap B) & \{\text{Distributividad}\} \\ & = & A \cup (A \cap B) & \{\text{Idempotencia de la intersección}\} \\ & = & A & \{\text{Apartado (a)}\} \end{array}$$

(c) $A \setminus B = A \cap B^c$

En efecto, sea x cualquiera del conjunto universal $\mathscr{U}$, entonces

$$\begin{array}{rcll} x \in A \setminus B & \Longleftrightarrow & x \in A \ \wedge \ x \notin B & \{\text{Definición de diferencia}\} \\ & \Longleftrightarrow & x \in A \ \wedge \ x \in B^c & \{\text{Definición de complementario}\} \\ & \Longleftrightarrow & x \in (A \cap B^c) & \{\text{Definición de intersección}\} \end{array}$$

luego,

$$\forall x, \ x \in A \setminus B \Longleftrightarrow x \in (A \cap B^c)$$

por lo tanto,

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

(d) $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$ En efecto,

$$\begin{array}{rcll} A \cup (A^c \cap B) & = & (A \cup A^c) \cap (A \cup B) & \{\text{Distributividad}\} \\ & = & \mathscr{U} \cap (A \cup B) & \{\text{Leyes del complementario}\} \\ & = & A \cup B & \{\text{Leyes de identidad}\} \end{array}$$

(e) $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

$$\begin{array}{rcll} A \cap (A^c \cup B) & = & (A \cap A^c) \cup (A \cap B) & \{\text{Distributividad}\} \\ & = & \emptyset \cup (A \cap B) & \{\text{Leyes del complementario}\} \\ & = & A \cap B & \{\text{Leyes de identidad}\} \end{array}$$

■

2.3 Conjunto de las Partes de un Conjunto

Dado un conjunto A, si nos referimos a algunos de sus subconjuntos estaríamos considerando un conjunto de conjuntos. En tales casos hablaremos de una clase de conjuntos o colección de conjuntos en vez de un conjunto de conjuntos. Si quisiéramos considerar algunos de los conjuntos de una clase dada de conjuntos, entonces hablaremos de una subclase o de una subcolección.

Ejemplo 2.5 Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y sea $\mathscr{A}$ la clase de subconjuntos de A que contienen exactamente tres elementos de A. Entonces,

$$\mathscr{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{c, d, e\}\}$$

siendo los elementos de $\mathscr{A}$ los conjuntos:

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\} \text{ y } \{c, d, e\}$$

■

2.3.1 Definición

Dado un conjunto A, llamaremos conjunto de las partes de A a la clase o colección de todos los subconjuntos de A y se nota por $\mathscr{P}(A)$.

Obsérvese que de acuerdo con esta definición, si X es un conjunto cualquiera de $\mathscr{U}$, entonces

$$X \in \mathscr{P}(A) \iff X \subseteq A$$

Ejemplo 2.6 Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Entonces,

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

■

Nota 2.1 Si el conjunto A es finito y tiene n elementos, entonces $\mathscr{P}(A)$ también es un conjunto finito y tiene 2^n elementos.

En efecto, sea X un elemento arbitrario de $\mathscr{P}(A)$. Para cada $a \in A$, hay dos opciones $a \in X$ ó $a \notin X$; como hay n elementos en A, habrá

$$\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}^{n \text{ veces}} = 2^n$$

diferentes conjuntos X. Es decir, $\mathscr{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Veremos otra demostración en una lección posterior. ■

Ejemplo 2.7 Especificar el conjunto de las partes para cada uno de los conjuntos siguientes:

(a) $\{a, b, c\}$

(b) $\{\{a, b\}, \{c\}\}$

(c) $\{\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, b, b\}\}$

<u>Solución</u>

(a) $\{a, b, c\}$

$$\mathscr{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

(b) $\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$$\mathscr{P}(\{\{a, b\}, \{c\}\}) = \{\emptyset, \{\{a, b\}\}, \{\{c\}\} \{\{a, b\}, \{c\}\}\}$$

(c) $\{\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, b, b\}\}$

$$\mathscr{P}(\{\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, b, b\}\}) = \mathscr{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a, b\} \{\{a, b\}\}\}$$

■

2.4 Producto cartesiano de conjuntos

El concepto matemático de relación está basado en la noción de relación entre objetos. Algunas relaciones describen comparaciones entre elementos de un conjunto: Una caja es más pesada que otra, un hombre es más rico que otro, etc. Otras relaciones involucran elementos de conjuntos diferentes, tal como "x vive en y", donde x es una persona e y es una ciudad, "x es propiedad de y" donde x es un edificio e y es una empresa, ó "x nació en el país y en el año z".

Todos los ejemplos anteriores son de relaciones entre dos o tres objetos, sin embargo, en principio, podemos describir relaciones que abarquen n objetos, donde n es cualquier entero positivo. Cuando hagamos una afirmación que relacione n objetos, será necesario no solamente especificar los objetos en sí mismos sino también una ordenación de los mismos. Por ejemplo, la posición relativa de 3 y 5 da lugar únicamente a dos afirmaciones "$5 < 3$" y "$3 < 5$", siendo una de ellas falsa y la otra verdadera.

Usaremos las *n-tuplas ordenadas de elementos* para especificar una sucesión finita de objetos no necesariamente distintos; la posición relativa de los objetos en la sucesión nos dará la ordenación necesaria de los mismos.

2.4.1 n-tupla ordenada

Llamaremos n-tupla ordenada a una sucesión de n objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dados en un cierto orden y la notaremos por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Obsérvese que es fundamental el orden en que escribamos los elementos de la n-tupla, así

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (a_2, a_1, \ldots, a_n)$$

Si $n = 2$, una n-tupla ordenada se llama "par ordenado" y si $n = 3$, "terna ordenada".

2.4.2 Igualdad de n-tuplas

Diremos que dos n-tuplas ordenadas son iguales si, y sólo si, sus i-ésimas componentes son iguales para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, es decir,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow a_i = b_i,\ \forall i, 1 \leqslant i \leqslant n$$

Muchas veces trataremos con colecciones de n-tuplas donde la componente i-ésima de cada n-tupla es un elemento de un conjunto A_i. Definimos el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas.

2.4.3 Producto cartesiano

Dada una colección arbitraria de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, llamaremos producto cartesiano de los mismos y lo notaremos por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, al conjunto formado por todas las n-tuplas ordenadas, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde $a_i \in A_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, es decir,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

En el caso de dos conjuntos A y B, tendremos

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A\ \wedge\ b \in B\}$$

y este producto se llama binario si $A = B$, o sea,

$$A \times A = \{(a, b) : a \in A\ \wedge\ b \in A\}$$

y suele notarse por A^2.

Su extensión a n conjuntos se define como

$$A \times A \times \overset{(n}{\cdots} \times A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

y lo notaremos por A^n.

Nota 2.2 Obsérvese que $A \times \emptyset = \emptyset$. En efecto, si $A \times \emptyset$ no fuese vacío, entonces existiría, al menos, un par $(a, b) \in A \times \emptyset$ de aquí que $a \in A$ y $b \in \emptyset$, lo cual es imposible.

Ejemplo 2.8 Considerando el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

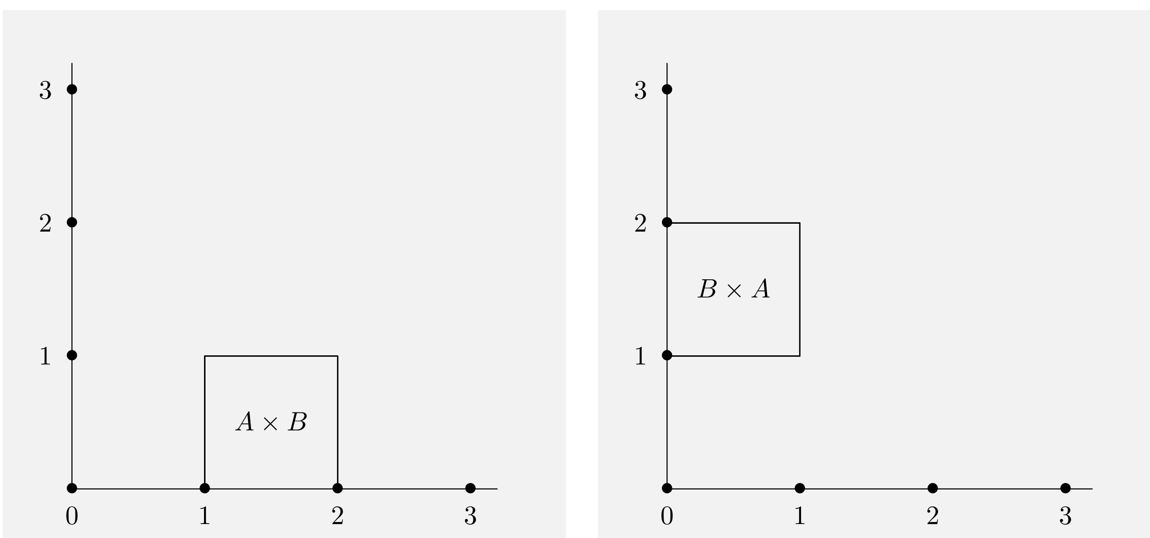
Cada punto P representa un par ordenado (x, y) de números reales y viceversa. A $\mathbb{R}^2$ se le llama normalmente *plano cartesiano*.

Ejemplo 2.9 Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ y $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Hallar $A \times B$ y $B \times A$.

Solución

$$A \times B = \{(x, y) : 1 \leqslant x \leqslant 2 \ \wedge\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

$$B \times A = \{(y, x) : 0 \leqslant y \leqslant 1 \ \wedge\ 1 \leqslant x \leqslant 2\}$$



Ejemplo 2.9

Cuando A y B son, como en este caso, conjuntos de números reales, su producto cartesiano puede representarse como un conjunto de puntos en el plano cartesiano.

Ejemplo 2.10 Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Entonces

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

también,

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$
$$B \times B = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

Nota 2.3 En los ejemplos anteriores se observa que el producto cartesiano de dos conjuntos no es conmutativo. Es decir, en general, $A \times B \neq B \times A$

Ejemplo 2.11 Sean $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{a,b\}$ y $A_3 = \{x,y\}$. Calcular $A_1 \times A_2 \times A_3$, $A_2 \times A_1 \times A_3$ y A_3^2.

Solución

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1,a,x),(1,a,y),(1,b,x),(1,b,y),(2,a,x),(2,a,y),(2,b,x),(2,b,y)\}$$

$$A_2 \times A_1 \times A_3 = \{(a,1,x),(a,1,y),(a,2,x),(a,2,y),(b,1,x),(b,1,y),(b,2,x),(b,2,y)\}$$

$$A_3^2 = A_3 \times A_3 = \{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y)\}$$

2.4.4 Propiedades

El producto cartesiano es distributivo respecto de la unión y la intersección de conjuntos, es decir, si A, B y C son tres conjuntos cualesquiera, se verifica:

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Demostración

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

En efecto, sea (x,y) un elemento arbitrario de $A \times (B \cup C)$, entonces,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \ \wedge \ y \in (B \cup C) && \{\text{Def. producto cartesiano}\}\\
&\iff x \in A \ \wedge \ (y \in B \ \vee \ y \in C) && \{\text{Def. de unión}\}\\
&\iff (x \in A \ \wedge \ y \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ y \in C) && \{\text{Dist. de } \wedge \text{ respecto de } \vee\}\\
&\iff (x,y) \in (A \times B) \ \vee \ (x,y) \in (A \times C) && \{\text{Def. producto cartesiano}\}\\
&\iff (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) && \{\text{Definición de unión}\}
\end{aligned}$$

luego,

$$\forall (x,y) \left((x,y) \in A \times (B \cup C) \iff (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \right)$$

es decir,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Los apartados (b), (c) y (d) se demuestran de una forma similar.

Ejemplo 2.12 Si $\mathscr{U} = \mathbb{Z}^+$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,5\}$ y $C = \{3,4,7\}$, determínense los conjuntos siguientes:

(a) $A \times B$

(b) $B \times A$

(c) $A \cup (B \times C)$

(d) $(A \cup B) \times C$

(e) $(A \times C) \cup (B \times C)$

Solución

(a) $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$
luego,
$$A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\}$$

(b) $B \times A = \{(b, a) : b \in B \wedge a \in A\}$
luego,
$$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

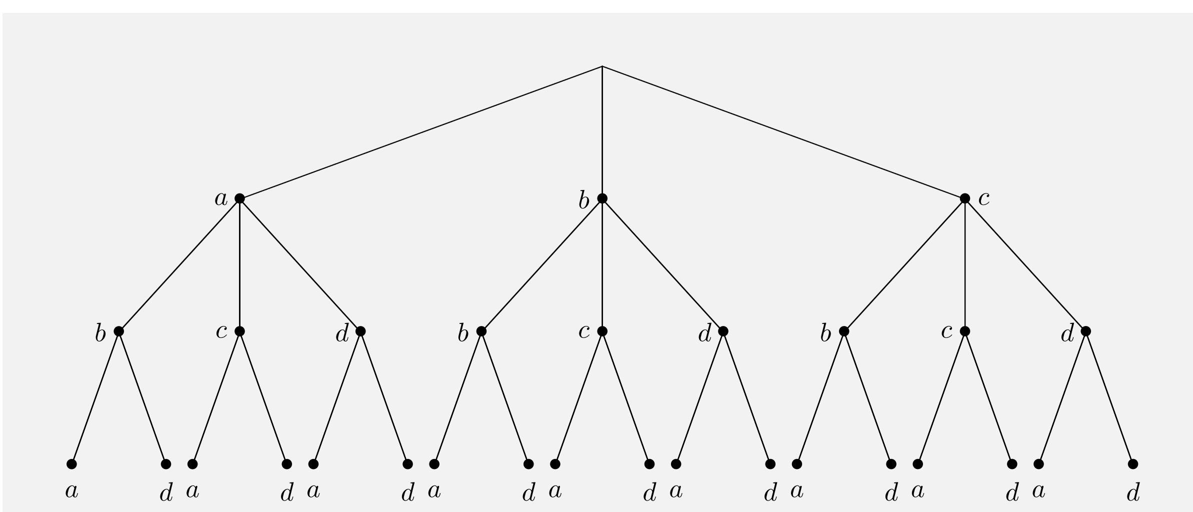
(c)
$$A \cup (B \times C) = \{1, 2, 3, 4, (2, 3), (2, 4), (2, 7), (5, 3), (5, 4), (5, 7)\}$$

(d)
$$\begin{aligned} (A \cup B) \times C &= \{(1, 3), (1, 4), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 7), (3, 3), \\ &\quad (3, 4), (3, 7), (4, 3), (4, 4), (4, 7), (5, 3), (5, 4), (5, 7)\} \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} (A \times C) \cup (B \times C) &= \{(1, 3), (1, 4), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 7), (3, 3), \\ &\quad (3, 4), (3, 7), (4, 3), (4, 4), (4, 7), (5, 3), (5, 4), (5, 7)\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.13 Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$ y $C = \{a, d\}$. Encontrar $A \times B \times C$ utilizando un diagrama en árbol.

Solución



Ejemplo 2.13

La figura muestra el diagrama en árbol. Recorriendo cada una de las ramas obtenemos las distintas ternas que integran el producto cartesiano de los tres conjuntos, es decir,

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= \{(a,b,a),(a,b,d),(a,c,a),(a,c,d),(a,d,a),(a,d,d),(b,b,a),(b,b,d),(b,c,a) \\ &\quad (b,c,d),(b,d,a),(b,d,d),(c,b,a),(c,b,d),(c,c,a),(c,c,d),(c,d,a),(c,d,d)\} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ejemplo 2.14 Dados tres conjuntos arbitrarios $A, B, C \subset \mathscr{U}$, probar $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Solución

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ En efecto,

$$\begin{aligned} \forall (a,b) \in A \times (B \cap C) &\iff a \in A \ \wedge \ b \in (B \cap C) \\ &\iff a \in A \ \wedge \ (b \in B \ \wedge \ b \in C) \\ &\iff (a \in A \ \wedge \ b \in B) \ \wedge \ (a \in A \ \wedge \ b \in C) \\ &\iff (a,b) \in A \times B \ \wedge \ (a,b) \in A \times C \\ &\iff (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

luego,

$$\forall (a,b)\, ((a,b) \in A \times (B \cap C) \iff (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C))$$

es decir,

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$\blacksquare$

Ejemplo 2.15 Se consideran los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \leqslant x \leqslant 8\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} : -6 < x \leqslant -4\}$. Hallar $A \times B$

Solución

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \leqslant x \leqslant 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} : -6 < x \leqslant -4\} = \{-5, -4\}$$

luego,

$$A \times B =$$

$$\{(3,-5),(4,-5),(5,-5),(6,-5),(7,-5),(8,-5),(3,-4),(4,-4),(5,-4),(6,-4),(7,-4),(8,-4)\}$$

$\blacksquare$

Ejemplo 2.16 Demostrar que

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

Solución

En efecto, sea (a,b) un elemento arbitrario de $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned} (a,b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &\iff (a,b) \in (A_1 \times B_1)) \ \wedge \ (a,b) \in (A_2 \times B_2) \quad \{\text{Def. de } \cap\} \\ &\iff (a \in A_1 \ \wedge \ b \in B_1) \ \wedge \ (a \in A_2 \ \wedge \ b \in B_2) \quad \{\text{Def. de } \times\} \\ &\iff (a \in A_1 \ \wedge \ a \in A_2) \ \wedge \ (b \in B_1 \ \wedge \ b \in B_2) \quad \{\text{Asoc. y conm.}\} \\ &\iff a \in (A_1 \cap A_2) \ \wedge \ b \in (B_1 \cap B_2) \\ &\iff (a,b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

luego,

$$\forall (a,b)\left((a,b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \Longleftrightarrow (a,b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)\right)$$

es decir,

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

■

Ejemplo 2.17 Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, hallar

(a) $A \times B \times C$

(b) $A \times (B \cap C)$

(c) $A \times (B \cup C)$

Solución

(a)

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= \{(a,1,\alpha),(a,1,\beta),(a,1,\gamma),(a,2,\alpha),(a,2,\beta),(a,2,\gamma),(a,3,\alpha),(a,3,\beta),\\ &\quad (a,3,\gamma),(b,1,\alpha),(b,1,\beta),(b,1,\gamma),(b,2,\alpha),(b,2,\beta),(b,2,\gamma),(b,3,\alpha),\\ &\quad (b,3,\beta),(b,3,\gamma),(c,1,\alpha),(c,1,\beta),(c,1,\gamma),(c,2,\alpha),(c,2,\beta),(c,2,\gamma),\\ &\quad (c,3,\alpha),(c,3,\beta),(c,3,\gamma),(d,1,\alpha),(d,1,\beta),(d,1,\gamma),(d,2,\alpha),(d,2,\beta),\\ &\quad (d,2,\gamma),(d,3,\alpha),(d,3,\beta),(d,3,\gamma)\} \end{aligned}$$

(b) $A \times (B \cap C) = A \times \emptyset = \emptyset$

(c) $A \times (B \cup C)$

Según hemos visto en la lección,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

luego,

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\\ &\quad (a,\alpha),(a,\beta),(a,\gamma),(b,\alpha),(b,\beta),(b,\gamma),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma),(d,\alpha),(d,\beta),(d,\gamma)\} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.18 Para $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$, probar que $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Solución

En efecto,

$$\begin{aligned} \forall (a,b) \in A \times (B \setminus C) &\Longleftrightarrow a \in A \ \wedge \ b \in B \setminus C\\ &\Longleftrightarrow a \in A \ \wedge \ (b \in B \ \wedge \ b \notin C)\\ &\Longleftrightarrow (a \in A \ \wedge \ b \in B) \ \wedge \ (a \in A \ \wedge \ b \notin C)\\ &\Longleftrightarrow (a,b) \in A \times B \ \wedge \ (a,b) \notin (A \times C)\\ &\Longleftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \setminus (A \times C) \end{aligned}$$

luego,

$$\forall (a,b)\left((a,b) \in A \times (B \setminus C) \Longleftrightarrow (a,b) \in (A \times B) \setminus (A \times C)\right)$$

es decir,

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

■