Universidad de Cádiz

Escuela Superior de Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Apuntes de Matemática Discreta

1. Conjuntos y Subconjuntos

Francisco José González Gutiérrez

Cádiz, Octubre de 2004

Lección 1

Conjuntos y Subconjuntos

Contenido

1.1 Generalidades 2
1.1.1 Conjuntos y Elementos 2
1.1.2 Determinación por Extensión 2
1.1.3 Determinación por Comprensión 3
1.1.4 Conjunto Universal 5
1.1.5 Conjunto Vacío 5
1.1.6 Axioma de Extensión 5
1.2 Inclusión de conjuntos 7
1.2.1 Subconjuntos 7
1.2.2 Inclusión Estricta 8
1.2.3 Proposición 9
1.2.4 Proposición 9
1.2.5 Caracterización de la Igualdad 11
1.2.6 Corolario 12
1.2.7 Transitividad de la Inclusión 12
1.3 Diagramas de Venn 13

Un conjunto es la reunión en un todo de objetos de nuestra intuición o de nuestro pensar, bien determinados y diferenciables los unos de los otros.

Georg Cantor (1845-1918)

El concepto de conjunto es de fundamental importancia en las matemáticas modernas. La mayoría de los matemáticos creen que es posible expresar todas las matemáticas en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Nuestro interés en los conjuntos se debe tanto al papel que representan en las matemáticas como a su utilidad en la modelización e investigación de problemas en la informática.

Los conjuntos fueron estudiados formalmente por primera vez por Georg Cantor[1]. Después de que la teoría de conjuntos se estableciera como un área bien definida de las matemáticas, aparecieron contradicciones o paradojas en la misma. Para eliminar tales paradojas, se desarrollaron aproximaciones más sofisticadas que las que hizo Cantor. Un tratamiento introductorio de la teoría de conjuntos se ocupa, generalmente, de la teoría elemental, la cual es bastante similar al trabajo original de Cantor. Utilizaremos esta aproximación más simple y desarrollaremos una teoría de conjuntos de la cual es posible

[1] Georg Cantor. Matemático alemán de origen ruso (San Petesburgo 1845-Halle 1918). Después de estudiar en Alemania, fue profesor de la universidad de Halle (1879). Escribió numerosas memorias, pero es especialmente conocido por ser el creador de la *Teoría de los conjuntos*.

derivar contradicciones. Parece extraño el proponerse tal cosa deliberadamente, pero las contradicciones no son un problema si, como es nuestro caso, el universo del discurso se define convenientemente. Aún más, la existencia de las paradojas en la teoría elemental no afecta a la validez de nuestros resultados ya que los teoremas que presentaremos pueden demostrarse mediante sistemas alternativos en los que las paradojas no ocurren.

1.1 Generalidades

Definimos los conceptos fundamentales del tema como conjunto, elemento, determinación de un conjunto por extensión, por comprensión y estudiamos la igualdad de dos conjuntos.

1.1.1 Conjuntos y Elementos

Intuitivamente, un conjunto es cualquier colección de objetos que pueda tratarse como una entidad. A cada objeto de la colección lo llamaremos elemento o miembro del conjunto.

A los conjuntos los designaremos con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas. La afirmación "*el elemento a pertenece al conjunto A*" se escribe

$$a \in A$$

y la negación de este hecho, $\neg(a \in A)$, se escribe

$$a \notin A$$

La definición de un conjunto no debe ser ambigua en el sentido de que pueda decidirse cuando un objeto particular pertenece, o no, a un conjunto.

1.1.2 Determinación por Extensión

Un conjunto está definido por extensión cuando se especifican todos los elementos que forman el mismo.

Ejemplo 1.1 Los siguientes conjuntos están definidos por extensión.

(a) El conjunto de las vocales del alfabeto.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

(b) El conjunto formado por los números enteros pares no negativos y menores que diez.

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

Obsérvese que los elementos del conjunto están separados por comas y encerrados entre llaves.

Ejemplo 1.2 Definir por extensión los siguientes conjuntos.

(a) El conjunto de los enteros no negativos menores que cinco.

(b) El conjunto de las letras de mi nombre.

(c) El conjunto cuyo único elemento es el primer Presidente de Gobierno de la democracia.

(d) El conjunto de los números primos entre 10 y 20.

(e) El conjunto de los múltiplos de 12 que son menores que 65.

Solución

(a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(b) $B = \{p, a, c, o\}$

(c) $C = \{\text{Adolfo Suárez}\}$

(d) $D = \{11, 13, 17, 19\}$

(e) $E = \{12, 24, 36, 48, 60\}$

■

Ejemplo 1.3 Definir, por extensión, los conjuntos siguientes:

(a) $A = \{x : x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ 3 < x < 12\}$

(b) $B = \{x : x \text{ es un número de un dígito}\}$

(c) $B = \{x : x = 2 \ \vee \ x = 5\}$

Solución

(a) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

(b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(c) $C = \{2, 5\}$

■

Nota 1.1 Los elementos de un conjunto infinito no pueden especificarse de una forma explícita; consecuentemente, necesitaremos una forma alternativa de describir tales conjuntos implícitamente.

1.1.3 Determinación por Comprensión

Se dice que un conjunto está definido por comprensión cuando se especifica una propiedad que caracteriza a todos los elementos del mismo.

Esta propiedad o especificación implícita, se hace a menudo mediante un predicado con una variable libre. El conjunto estará determinado por aquellos elementos del universo que hacen del predicado una proposición verdadera. De aquí que si $p(x)$ es un predicado con una variable libre, el conjunto

$$A = \{x : p(x)\}$$

denota al conjunto A tal que $a \in A$ si, y sólo si $p(a)$ es verdad. ■

Ejemplo 1.4 Definir por comprensión los siguientes conjuntos:

(a) El conjunto de los enteros mayores que diez.

(b) El conjunto de los enteros pares.

(c) El conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Solución

(a) $A = \{x : x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x > 10\}$

(b) $B = \{x : x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ \exists y \in \mathbb{Z} \ \wedge \ x = 2y\}$

(c) $C = \{x : x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ 1 \leqslant x \leqslant 5\}$

Ejemplo 1.5 Definir por extensión el siguiente conjunto dado por comprensión.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$$

Solución

Dado que las soluciones de la ecuación son 1 y 2, podemos escribir

$$A = \{1, 2\}$$

Nota 1.2 Muchas veces se utilizan significados algo menos formales para describir conjuntos.

Por ejemplo, el conjunto de los números enteros mayores que diez, suele escribirse:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x > 10\}$$

y el conjunto de los enteros pares,

$$B = \{x : x = 2y, \ y \in \mathbb{Z}\}$$

A veces tanto en conjuntos finitos demasiado grandes como en conjuntos infinitos, se utiliza la elipsis matemática para caracterizar a los elementos de un conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros del 1 al 100,

$$C = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$$

o el conjunto de los enteros pares no negativos,

$$D = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Algunos conjuntos aparecerán muy frecuentemente a lo largo del curso y se usan símbolos especiales para designarlos.

$\mathbb{Z}$: Conjunto de los números enteros.

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$: Conjunto de los números naturales o enteros positivos.

$\mathbb{Z}_0^+$: Conjunto de los enteros no negativos.

$\mathbb{Q}$: Conjunto de los números racionales.

$\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales.

$\mathbb{C}$: Conjunto de los números complejos.

Incluso si podemos especificar todos los elementos de un conjunto puede que no sea práctico hacerlo. Por ejemplo, no definiríamos por extensión el conjunto de los estudiantes de la Universidad de Cádiz que estudien Informática, aunque teóricamente es posible definirlo.

Así pues, describiremos un conjunto mediante un listado exhaustivo de sus elementos sólo si contiene unos pocos elementos, en caso contrario describiremos un conjunto mediante una propiedad que caracterice a los mismos.

1.1.4 Conjunto Universal

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos en consideración pertenecen a un gran conjunto fijo llamado conjunto universal. Lo notaremos por $\mathscr{U}$.

Ejemplo 1.6 Para cada uno de los conjuntos siguientes, elegir un conjunto universal y un predicado apropiados para definirlo.

(a) El conjunto de los enteros entre 0 y 100.

(b) El conjunto de los enteros positivos impares.

(c) El conjunto de los múltiplos de 10.

<u>Solución</u>

(a) $A = \{x : x \in \mathbb{Z} \ \wedge x > 0 \ \wedge \ x < 100\}$ ó $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 100\}$

(b) $B = \{x : \exists y \in \mathbb{Z}^+, \ x = 2y - 1\}$ ó $B = \{x : x = 2y - 1, \ y \in \mathbb{Z}^+\}$

(c) $C = \{x : \exists y \in \mathbb{Z}, \ x = 10y\}$ ó $C = \{x : x = 10y, \ y \in \mathbb{Z}\}$

1.1.5 Conjunto Vacío

Al conjunto único que no contiene elementos, lo llamaremos conjunto vacío. Lo notaremos con el símbolo $\emptyset$ que proviene del alfabeto noruego.

1.1.6 Axioma de Extensión

Dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si tienen los mismos elementos. Es decir, cada elemento del conjunto A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A.

Su expresión formal en notación lógica es:

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x \left[(x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in A) \right]$$

o bien,

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x \, (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

Nota 1.3 El axioma de extensión asegura que si dos conjuntos tienen los mismos elementos, ambos son iguales, independientemente de como estén definidos.

Como todo conjunto tiene los mismos elementos que él mismo, se sigue que si un conjunto está definido por extensión, el orden el que los elementos figuren en él es intrascendente. Así pues, los conjuntos $\{a, b, c\}$, $\{b, c, a\}$ y $\{c, b, a\}$ son iguales.

También se sigue del axioma de extensión que la aparición de un elemento más de una vez en un conjunto, es igualmente intrascendente. Por ejemplo, los conjuntos $\{a, b\}$, $\{a, b, b\}$ y $\{a, a, a, b\}$ son iguales ya que todo elemento de cualquiera de ellos está en los demás, por tanto, son especificaciones diferentes del mismo conjunto. ■

Ejemplo 1.7 Determinar, en el conjunto de los números enteros, cuáles de los siguientes conjuntos son iguales.

$$A = \left\{x : x \text{ es par y } x^2 \text{ es impar}\right\}$$
$$B = \{x : \exists y,\ y \in \mathbb{Z} \ \wedge\ x = 2y\}$$
$$C = \{1, 2, 3\}$$
$$D = \{0, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$$
$$E = \{2x : x \in \mathbb{Z}\}$$
$$F = \{3, 3, 2, 1, 2\}$$
$$G = \left\{x : x^3 - 6x^2 - 7x - 6 = 0\right\}$$

Solución

Sea x cualquier número entero, entonces

✓
$$\begin{aligned} x \text{ es par} &\implies x = 2y,\ y \in \mathbb{Z} \\ &\implies x^2 = 4y^2,\ y \in \mathbb{Z} \\ &\implies x^2 = 2(2y^2),\ 2y^2 \in \mathbb{Z} \\ &\implies x^2 \text{ es par} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la proposición $\forall x(x \text{ es par } \wedge\ x^2 \text{ es impar})$ es falsa o dicho de otra forma no hay ningún número par cuyo cuadrado sera impar y, por lo tanto, A no tiene elementos es decir es el conjunto vacío.

✓ $x \in B \iff \exists y : y \in \mathbb{Z} \ \wedge\ x = 2y \iff x$ es par, luego $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es par}\}$

✓ $x \in C \iff x = 1 \ \vee\ x = 2 \ \vee\ x = 3$

✓ $E = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es par}\}$

✓ $x \in F \iff x = 1 \ \vee\ x = 2 \ \vee\ x = 3$

✓ $x \in G \iff x^3 - 6x^2 - 7x - 6 = 0$

Pero no existe ningún número entero que satisfaga la ecuación anterior, por lo tanto, G es el conjunto vacío.

De todo lo anterior, se sigue que

∗ $A = G$
∗ $B = E$
∗ $C = F$
∗ El conjunto D no es igual a ninguno de los otros.

Ejemplo 1.8 Dar una condición necesaria y suficiente para que dos conjuntos sean distintos.

Solución

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario $\mathscr{U}$. Entonces, por el *axioma de extensión*

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x\, [(x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in A)]$$

de aquí que por *asociatividad* (**??**), tengamos que

$$A = B \Longleftrightarrow [\forall x\, (x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge \forall x\, (x \in B \Longrightarrow x \in A)]$$

y si ahora negamos ambos miembros, tendremos

$$\neg(A = B) \Longleftrightarrow \neg\, [\forall x\, (x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge \forall x\, (x \in B \Longrightarrow x \in A)]$$

por lo tanto,

$$\begin{array}{rcll} A \neq B & \Longleftrightarrow & \neg\, [\forall x\, (x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge \forall x\, (x \in B \Longrightarrow x \in A)] & \\ & \Longleftrightarrow & [\neg\forall x\, (x \in A \Longrightarrow x \in B)] \vee [\neg\forall x\, (x \in B \Longrightarrow x \in A)] & \{\text{De Morgan}\} \\ & \Longleftrightarrow & [\exists x : \neg\, (x \in A \Longrightarrow x \in B)] \vee [\exists x : \neg\, (x \in B \Longrightarrow x \in A)] & \{\text{Regla General}\} \\ & \Longleftrightarrow & [\exists x : \neg\, (\neg(x \in A) \vee (x \in B))] \vee [\exists x : \neg\, (\neg(x \in B) \vee (x \in A))] & \{\text{Implicación}\} \\ & \Longleftrightarrow & [\exists x : (\neg\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B))] \vee [\exists x : (\neg\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in A))] & \{\text{De Morgan}\} \\ & \Longleftrightarrow & [\exists x : (x \in A \wedge x \notin B)] \vee [\exists x : (x \in B \wedge x \notin A)] & \{\text{Doble Negación}\} \end{array}$$

Así pues, una condición necesaria y suficiente para que dos conjuntos A y B sean distintos es que exista un elemento en A que no esté en B o que exista un elemento en B que no esté en A.

1.2 Inclusión de conjuntos

1.2.1 Subconjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A está contenido en B o que es un subconjunto de B, y lo notaremos por $A \subseteq B$, si cada elemento de A es un elemento de B, es decir,

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x\, (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

También puede decirse que B contiene a A, en cuyo caso escribiremos $B \supseteq A$.

Ejemplo 1.9 Probar que el conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$ es subconjunto del $B = \{1, 2, 3\}$

Solución

En efecto, sea a un elemento cualquiera de $\mathbb{R}$, o sea, un número real arbitrario. Entonces,

$$a \in A \Longleftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Longleftrightarrow a = 2 \text{ ó } a = 1 \Longrightarrow a \in B$$

luego $\forall x\, (x \in A \Longrightarrow x \in B)$ y según la definición anterior, $A \subseteq B$.

Ejemplo 1.10 Dar una condición necesaria y suficiente para que un conjunto A no esté contenido en otro conjunto B.

Solución

$$\begin{aligned}
A \nsubseteq B &\iff \neg(A \subseteq B) \\
&\iff \neg\left[\forall x\, (x \in A \Longrightarrow x \in B)\right] \\
&\iff \exists x : \left[\neg\, (x \in A \Longrightarrow x \in B)\right] \\
&\iff \exists x : \left[\neg\, (\neg(x \in A) \vee (x \in B))\right] \\
&\iff \exists x : \left[\neg\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\right] \\
&\iff \exists x : (x \in A \wedge x \notin B)
\end{aligned}$$

es decir, una condición necesaria y suficiente para que A no esté contenido en B es que exista, al menos, un elemento en A que no esté en B. ■

Ejemplo 1.11 ¿Es $B = \{1, 2, 3\}$ un subconjunto de $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$?

Solución

No, ya que $3 \in B$ y, sin embargo, $3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2 \neq 0$, luego $3 \notin A$, es decir, hemos encontrado un elemento en B que no está en A, por tanto, $B \nsubseteq A$. ■

1.2.2 Inclusión Estricta

Si $A \subseteq B$ y además B tiene un elemento que no está en A, diremos que A está estrictamente incluido en B o que A es un subconjunto propio de B y lo notaremos por $A \subset B$.

$$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge \left[\exists x : (x \in B \wedge x \notin A)\right]$$

Ejemplo 1.12 Dar una condición necesaria y suficiente para que un conjunto esté estrictamente contenido en otro.

Solución

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario $\mathscr{U}$. Entonces, según acabamos de ver

$$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge \left[\exists x : (x \in B \wedge x \notin A)\right]$$

de donde, teniendo en cuenta el resultado del ejemplo 1.8, se sigue que

$$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$$

■

Nota 1.4 Los conjuntos también son objetos, luego pueden ser elementos de otros conjuntos, por ejemplo, el conjunto

$$A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b\}, \{c\}\}$$

tiene cuatro elementos que son los conjuntos $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b\}$ y $\{c\}$. Si tuviéramos una caja con tres paquetes de caramelos, la consideraríamos como una caja con paquetes antes que una caja con caramelos, por lo que se trataría de un conjunto (la caja) con tres elementos (los paquetes).

Análogamente, si A es un conjunto, entonces $\{A\}$ es un conjunto con un único elemento, A, sin importarnos cuantos elementos tenga A.

Un caso curioso ocurre con el conjunto vacío, $\emptyset$. Una caja con un paquete vacío de caramelos no es una caja vacía ya que contiene algo, un paquete. De la misma forma $\{\emptyset\}$ es un conjunto con un elemento mientras que $\emptyset$ no contiene elementos, así que $\emptyset$ y $\{\emptyset\}$ son conjuntos distintos. Tendremos que $\emptyset \in \{\emptyset\}$ e incluso $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, pero $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. ■

Ejemplo 1.13 Describir brevemente la diferencia entre los conjuntos $\{a\}$ y $\{\{a\}\}$ y entre los conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ y $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Solución

$\{a\}$ es un conjunto cuyo único elemento es el a.

$\{\{a\}\}$ es un conjunto cuyo único elemento es el conjunto $\{a\}$.

$\emptyset$. Conjunto único que no tiene elementos (definición 1.1.5).

$\{\emptyset\}$. Conjunto con un único elemento que es el $\emptyset$.

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Conjunto con dos elementos, el $\emptyset$ y el $\{\emptyset\}$.

1.2.3 Proposición

Sea $\mathscr{U}$ el conjunto universal y A un conjunto cualquiera. Entonces $A \subseteq \mathscr{U}$.

Demostración

La demostración es un ejemplo de *demostración trivial* basada en la definición de conjunto universal que nos permite afirmar que la proposición $\forall x, x \in \mathscr{U}$ es una tautología, es decir es verdad siempre.

El conjunto A es un subconjunto de $\mathscr{U}$ si, y sólo si la implicación

$$x \in A \Longrightarrow x \in \mathscr{U}$$

es verdad para cada x de $\mathscr{U}$. Pero $x \in \mathscr{U}$ es verdad para todos los x, luego la implicación también es verdad independientemente de que $x \in A$ sea verdadero o falso. Como x es un elemento arbitrario de $\mathscr{U}$, se sigue que

$$\forall x \, (x \in A \Longrightarrow x \in \mathscr{U})$$

es verdad y, por lo tanto,

$$A \subseteq \mathscr{U}$$

1.2.4 Proposición

Sea A un conjunto cualquiera, entonces $\emptyset \subseteq A$.

Demostración

Esta demostración es un ejemplo de *demostración vacía* ya que la definición de conjunto vacío nos permite afirmar que la proposición $\exists x : x \in \emptyset$ es una contradicción, es decir siempre es falsa.

Pues bien, sea x un elemento arbitrario del universal. Como $x \in \emptyset$ es falsa para todos los elementos de $\mathscr{U}$ tendremos que la implicación

$$x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A$$

es verdadera.

De la arbitrariedad de x se sigue que

$$\forall x \, (x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A)$$

y, consecuentemente,

$$\emptyset \subseteq A$$

Ejemplo 1.14 Determinar los subconjuntos de un conjunto.

(a) Veamos cuantos subconjuntos tiene el conjunto $\{a, b\}$.

De la proposición 1.2.4 se sigue que el conjunto vacío, $\emptyset$ es uno de ellos. Por otra parte, $a \in A$ y $b \in B$ luego por la definición de inclusión (1.2.1), $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{a, b\}$ son subconjuntos de $\{a, b\}$. Consecuentemente, el conjunto propuesto tiene cuatro subconjuntos distintos:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \text{ y } \{a, b\}$$

Obsérvese que $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ y $a \in \{a, b\}$, pero $a \nsubseteq \{a, b\}$ y $\{a\} \notin \{a, b\}$. También $\emptyset \subseteq \{a, b\}$, pero $\emptyset \notin \{a, b\}$

(b) El conjunto $\{\{a\}\}$ es un conjunto unitario ya que tiene un único elemento, el conjunto $\{a\}$. Sus subconjuntos son el $\emptyset$ y el $\{\{a\}\}$. ■

Ejemplo 1.15 Determinar todos los subconjuntos de los siguientes conjuntos:

(a) $\{1, 2, 3\}$

(b) $\{1, \{2, 3\}\}$

(c) $\{\{1, \{2, 3\}\}\}$

(d) $\{\emptyset\}$

(e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(f) $\{\{1, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 2\}\}$

(g) $\{\{\emptyset, 2\}, \{2\}\}$

<u>Solución</u>

Utilizaremos la definición de subconjunto (1.2.1),

$$A \subseteq B \iff \forall x\, (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

(a) $\{1, 2, 3\}$

$\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$ (Proposición 1.2.4).
$1 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.
$2 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.
$3 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.
$1 \in \{1, 2, 3\}$ y $2 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.
$1 \in \{1, 2, 3\}$ y $3 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.
$2 \in \{1, 2, 3\}$ y $3 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.
$1 \in \{1, 2, 3\}$, $2 \in \{1, 2, 3\}$ y $3 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

por lo tanto, los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ son

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \text{ y } \{1, 2, 3\}$$

(b) $\{1, \{2, 3\}\}$. Aquí tenemos que 1 y $\{2, 3\}$ son los dos elementos que tiene este conjunto, luego razonando igual que en el apartado anterior, sus subconjuntos son:

$$\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\} \text{ y } \{1, \{2, 3\}\}$$

(c) $\{\{1, \{2, 3\}\}\}$. Este conjunto tiene un único elemento que es $\{1, \{2, 3\}\}$, por lo tanto sus subconjuntos son:

$$\emptyset \text{ y } \{\{1, \{2, 3\}\}\}$$

(d) $\{\emptyset\}$. Este conjunto tiene un elemento que es $\emptyset$, por lo tanto tiene dos subconjuntos,

$$\emptyset \text{ (por 1.2.4) y } \{\emptyset\} \text{ (por 1.2.1)}$$

(e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Este conjunto tiene dos elementos, $\emptyset$ y $\{\emptyset\}$, por lo tanto sus subconjuntos son

$$\emptyset \text{ (por 1.2.4) y } \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\} \text{ y } \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \text{ (por 1.2.1)}$$

(f) $\{\{1,2\}, \{2,1,1\}, \{2,1,1,2\}\}$. Obsérvese que

$$\{1,2\} = \{2,1,1\} = \{2,1,1,2\}$$

luego el conjunto propuesto es

$$\{\{1,2\}\}$$

y, por lo tanto, sus subconjuntos son

$$\emptyset \text{ y } \{\{1,2\}\}$$

(g) $\{\{\emptyset,2\}, \{2\}\}$. Siguiendo un razonamiento idéntico a los anteriores apartados, sus subconjuntos son

$$\emptyset, \{\{\emptyset,2\}\}, \{\{2\}\} \text{ y } \{\{\emptyset,2\}, \{2\}\}$$

1.2.5 Caracterización de la Igualdad

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario $\mathscr{U}$. Entonces $A = B$ si, y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

<u>Demostración</u>

"*Sólo si.*" $A = B \Longrightarrow A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$

En efecto, supongamos que $A = B$. Entonces por el *axioma de extensión*, cada elemento de A es un elemento de B luego por definición de subconjunto, $A \subseteq B$. Así pues, si $A = B$, entonces $A \subseteq B$. Utilizando los mismos argumentos, aunque intercambiando los papeles de A y B, tendremos que si $A = B$, entonces $B \subseteq A$. De aquí que

$$(A = B \Longrightarrow A \subseteq B) \wedge (A = B \Longrightarrow B \subseteq A)$$

lo cual equivale a

$$A = B \Longrightarrow A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$$

"*Si.*" $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$

En efecto,

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Longrightarrow [(\forall x\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)] \wedge [(\forall x\,(x \in B \Longrightarrow x \in A)]$$

consecuentemente, por el *axioma de extensión*

$$A = B$$

Este teorema lo utilizaremos con mucha frecuencia para comprobar que dos conjuntos son iguales, es decir, para probar que $A = B$, probaremos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

1.2.6 Corolario

De la caracterización anterior se sigue que para cualquier conjunto A, se verifica que $A \subseteq A$.

1.2.7 Transitividad de la Inclusión

Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario $\mathscr{U}$. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

Demostración

Sea x un elemento arbitrario del universal $\mathscr{U}$.

De $A \subseteq B$, se sigue que $x \in A \Longrightarrow x \in B$

De $B \subseteq C$, se sigue que $x \in B \Longrightarrow x \in C$

De la transitividad de la implicación lógica se sigue que

$$x \in A \Longrightarrow x \in C$$

y al ser x arbitrario, tendremos

$$\forall x\,(x \in A \Longrightarrow x \in C)$$

por lo tanto,

$$A \subseteq C$$

■

Ejemplo 1.16 Sean A, B y C tres conjuntos. Si $A \in B$ y $B \in C$, ¿es posible que $A \in C$?, ¿es siempre verdad que $A \in C$?. Da ejemplos de tus afirmaciones.

Solución

En efecto, es posible. Por ejemplo, sean

$$A = \{a\}$$
$$B = \{\{a\}\}$$
$$C = \{\{\{a\}\}, \{a\}\}$$

entonces, $A \in B$, $B \in C$ y $A \in C$. Ahora bien, esto no es verdad siempre. En efecto, sean

$$A = \{a\}, B = \{\{a\}\} \text{ y } C = \{\{\{a\}\}\}$$

entonces,

$$A \in B \text{ y } B \in C$$

y sin embargo,

$$A \notin C$$

Ejemplo 1.17 Estudiar la relación que existe entre los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 2\}$
$B = \{1, 3\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 = 0\}$
$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$
$E = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x < 3\}$
$F = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \text{ es impar y } x < 5\}$

Solución

A y B son distintos, ya que $2 \in A$ y $2 \notin B$ y $3 \in B$ y $3 \notin A$. Así pues, hemos encontrado un elemento en A que no está en B y un elemento en B que no está en A. Por tanto, por el resultado del ejemplo 1.8, $A \neq B$.

Ahora observemos lo siguiente:

Sea x un número real arbitrario. Entonces,

$$x \in C \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 3 \Longleftrightarrow x \in B$$

o sea, $C = B$

$$x \in D \Longleftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 2 \Longleftrightarrow x \in A$$

es decir, $A = D$.

Sea x un entero positivo cualquiera. Entonces,

$$x \in E \Longleftrightarrow x < 3 \Longleftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 2 \Longleftrightarrow x \in A$$

por lo tanto, $A = E$.

Sea x un entero positivo cualquiera. Entonces,

$$x \in F \Longleftrightarrow x \text{ es impar } x < 5 \Longleftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 3 \Longleftrightarrow x \in B$$

por lo tanto, $F = B$.

Consecuentemente,

$$\begin{array}{lllllllll}
A \neq B & & & & & & & & \\
A \neq C & \square & B = C & & & & & & \\
A = D & \square & B \neq D & \square & C \neq D & & & & \\
A = E & \square & B \neq E & \square & C \neq E & \square & D = E & & \\
A \neq F & \square & B = F & \square & C = F & \square & D \neq F & \square & E \neq F
\end{array}$$

■

Nota 1.5 Con el conjunto vacío puede construirse una sucesión infinita de conjuntos distintos.

En la sucesión,

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

el primer conjunto no tiene ningún elemento y cada uno de los restantes tiene, exactamente, un elemento que es el conjunto que le precede en la sucesión.

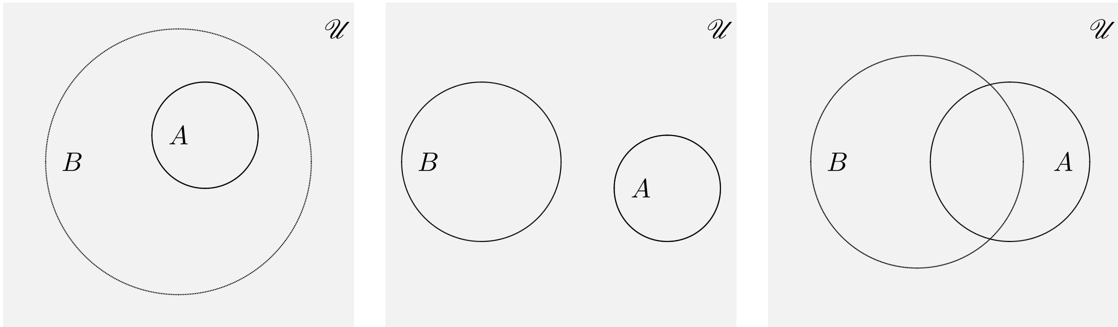
En la sucesión,

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

cada conjunto tiene como elementos todos los conjuntos que le preceden en la sucesión. Así, contando desde cero, el conjunto que ocupa el lugar k tiene k elementos. ■

1.3 Diagramas de Venn

Una representación gráfica para los conjuntos son los diagramas de Venn. El conjunto universal se representa por el interior de un rectángulo y todos los demás conjuntos se representan por regiones cerradas incluidos en el mismo.



(a) $A \subseteq B$ (b) A y B son disjuntos (c) A y B no son disjuntos

Diagramas de Venn

- Si A es un subconjunto de B, $A \subseteq B$, entonces la región que representa a A, estará contenida en la que representa a B (apartado (a) de la figura).
- Si A y B no tienen elementos en común (A y B son disjuntos), entonces la región que representa a A estará separada completamente de la región que representa a B (apartado (b) de la figura).
- Si A y B son dos conjuntos arbitrarios, entonces es posible que algunos elementos estén en A pero no en B, algunos en B pero no en A, algunos en los dos, A y B, y algunos ni en A, ni en B (apartado (c) en la figura).