CAPITULO 1

Teorema del Binomio

Este capitulo esta destinado a presentar contenidos y actividades que permitirán al estudiante: Operar con simbología matemática, desarrollar expresiones que involucren un número finito de productos binomiales, y emplear el concepto de búsqueda instantánea, a fin de determinar rápida y eficientemente los términos en desarrollos binomiales mediante un algoritmo

1. Introducción a los Factoriales

Definición 1.1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *llamaremos* n *factorial a* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$*, y definimos además* $0! = 1$

Ejemplo 1.1.1. $n! = (n-1)! \cdot n \quad$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$

En efecto

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \\ &= [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)] \cdot n \\ &= (n-1)! \cdot n \end{aligned}$$

Definición 1.2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ *y* $k \leq n$ *llamaremos número combinatorio a*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{1}$$

Ejemplo 1.2.1. $\displaystyle\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{3! \cdot 4}{1! \cdot 3!} = 4$

Observación 1.2.2. *Consideremos un conjunto con cuatro elementos, digamos* $C = \{1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{N}$ *entonces*

- ⋄ *La cantidad de subconjuntos de* C *con cardinalidad 3 son los siguientes*

$$C_1 = \{1, 2, 3\}, \;\; C_2 = \{1, 2, 4\}, \;\; C_3 = \{1, 3, 4\}, \; C_3 = \{2, 3, 4\}$$

  Son como se ve cuatro conjuntos lo que coincide con $\displaystyle\binom{4}{3}$

- ⋄ *La cantidad de subconjuntos de* C *con cardinalidad 2 son los siguientes seis conjuntos*

$$C_1 = \{1, 2\}, \;\; C_2 = \{1, 3, \}, \;\; C_3 = \{1, 4\}, \; C_3 = \{2, 3\}, \; C_3 = \{2, 4\}, \; C_3 = \{3, 4\}$$

  Y que también coincide con $\displaystyle\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2! \cdot 2!} = 6$

  En realidad esto no es una coincidencia, ya que en la práctica el número combinatorio $\displaystyle\binom{n}{k}$ *con* $k \leq n$*, fue construido para contar la cantidad de grupos con* k *elementos a partir de* n *elementos dados, (de allí la restricción* $k \leq n$*)*

1.3. Propiedades de los Números Combinatorios. Entre muchas propiedades de los números combinatorios, sólo exhibiremos las que necesitamos estrictamente para conseguir nuestros objetivos.

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

En efecto

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

En particular, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, para verificar esta igualdad, basta hacer $k = 0$ y recordar que el conjunto vacío no tiene elementos y es subconjunto de todos los conjuntos

(2) $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-(k-1)}\binom{n}{k}$

En efecto

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{k!}\cdot\frac{(n+1)}{(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{k!}\cdot\frac{(n+1)}{(n-k)!(n-k+1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n+1)}{n-(k-1)} = \binom{n}{k}\cdot\frac{(n+1)}{n-(k-1)}\end{aligned}$$

(3) $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$

En efecto

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\frac{n+1}{k+1}$$

(4) $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$

En efecto

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!}\cdot\frac{1}{(k+1)(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!}\cdot\frac{n-k}{(k+1)(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}\end{aligned}$$

(5) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

En efecto

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!}\\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

2. Teorema del Binomio

Teorema 2.1. *(Teorema del Binomio). Si $n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\mathbb{R}$ tal que $a+b\neq 0$ entonces*

$$\boxed{(a+b)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

Demostración

- ♦ *Debemos verificar que* $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$
- ♦ *Gestión de la información: Como* $n\in\mathbb{N}$ *entonces podemos usar el proceso de inducción matemática, para verificar la validez de la fórmula*

$$F(n): \qquad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad (\forall n; n\in\mathbb{N})$$

◇ *Debemos mostrar que F(1) es verdadera*

Por una parte tenemos que $(a+b)^1=(a+b)$, *y por otra,* $\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{n-k}b^k=\binom{1}{0}a^{1-0}b^0+\binom{1}{1}a^{1-1}b^1=a+b$

Así que, $(a+b)^1=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{n-k}b^k$, *y* $F(1)$ *es verdadera*

◇ *Hipótesis de inducción: Supongamos que F(n) es verdadera, es decir*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad (H)$$

◇ *Tesis de inducción. Debemos mostrar que F(n+1) es verdadera*

- *Desarrollando F(n+1) tenemos que*

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\ &\overset{(H)}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \qquad (\star) \end{aligned}$$

- *Aplicando la propiedad del reloj* (**??**)*, a la segunda parcela en* $(\star)$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} &= \sum_{k=0+1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \end{aligned}$$

- *Reemplazando en* $(\star)$ *tenemos que:*

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\ &= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k + \binom{n}{n}b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k \end{aligned}$$

Así que F(n+1) es verdadera, y

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Corolario 2.2. En Teorema (2.1) *Para cada* $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *el término de orden* $k+1$ *es de la forma:*

$$\boxed{t_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

En efecto

Del teorema (2.1) sigue que

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\\
&= \underbrace{\binom{n}{0}a^{n-0}b^0}_{t_1}+\underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^1}_{t_2}+\underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{t_3}+\cdots+\underbrace{\binom{n}{n}a^{n-n}b^n}_{t_{n+1}}
\end{aligned}
$$

Así que $t_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$*, para* $k=0,1,2,\dots,n$

3. Ejercicios Resueltos de Teorema del Binomio

(1) En el desarrollo binomial, $B=\left(x-\dfrac{1}{x^3}\right)^n$ para $(n\in\mathbb{N})$. Demostremos que si existe un término de la forma x^{-4m} entonces n debe ser un múltiplo de 4.

Solución

♦ Debemos mostrar que $n=4\cdot r$

♦ Gestión de la información

◇ t_{s+1} es el término pedido si y sólo si

$$
\begin{aligned}
t_{s+1} &= \binom{n}{s}x^{n-s}\left(\tfrac{-1}{x^3}\right)^s\\
&= \binom{n}{s}x^{n-s}\tfrac{(-1)^s}{x^{3s}}\\
&= \binom{n}{s}x^{n-4s}(-1)^s
\end{aligned}
$$

◇ x^{-4m} aparecerá en el término t_{s+1} si y sólo si

$$
\begin{aligned}
x^{-4m}=x^{n-4s} &\Longrightarrow -4m=n-4s\\
&\Longrightarrow 4s-4m=n\\
&\Longrightarrow 4(s-m)=n
\end{aligned}
$$

♦ Conclusión : " n es un múltiplo de 4."

(2) Determinemos, (si existe) el término independiente de x en el desarrollo binomial

$$(2x+1)\left(1+\frac{2}{x}\right)^n$$

Solución

♦ Debemos determinar el término independiente de x, es decir aquel en que aparece $x^0 = 1$.

♦ Gestión de la información

⋄ **Del Teorema del Binomio (2.1)** sigue que

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{(n-k)}\left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\,x^{-k}$$

⋄ Multiplicando por $(2x+1)$ tenemos que

$$(2x+1)\left(1+\frac{2}{x}\right)^n = (2x+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\,x^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k+1}\,x^{(-k+1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\,x^{-k}$$

⋄ Luego, existirá el término independiente de x si

$$-k+1=0 \wedge -k=0 \iff k=1 \wedge k=0$$

♦ Así que el término pedido es $\displaystyle\binom{n}{1}\cdot 2^2 + \binom{n}{0}\cdot 2^0 = 4n+1$

(3) Demostremos usando el teorema del binomio que

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s} = 0$$

Solución

$$\left[(1-1)^n = 0 \ \wedge\ (1-1)^n \overset{\textbf{Teo(2.1)}}{=} \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(1)^{(n-s)}(-1)^s\right] \Longrightarrow 0 = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}(-1)^s$$

(4) Si $(n\in\mathbb{N})$, y $A=\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ y $B=\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, son dos desarrollos binomiales tales que $t_k(A)$ es el k- ésimo término de A y $t_k(B)$ es el k- ésimo término de B, $(k\geq 1)$ entonces demostremos que

$$t_k(A) = t_k(B) \Longrightarrow n \text{ es un número par}$$

Solución

♦ Debemos verificar que $n = 2\cdot s$, para algún entero s.

♦ Gestión de la información

⋄ Para el binomio A tenemos que:

$$t_k(A) \quad = \quad \binom{n}{k-1}(x^2)^{n-(k-1)} \cdot \frac{1}{x^{k-1}} = \binom{n}{k-1}(x)^{2n-3(k-1)}$$

◇ Para el binomio B tenemos que:

$$t_k(B) \quad = \quad \binom{n}{k-1}(x^3)^{n-(k-1)} \cdot \frac{1}{(x^2)^{k-1}} = \binom{n}{k-1}(x)^{3n-5(k-1)}$$

⧫ Finalmente comparando términos tenemos que n es par, pues,

$$\begin{aligned} t_k(A) = t_k(B) \quad &\Longleftrightarrow \quad \binom{n}{k-1}(x)^{2n-3(k-1)} = \binom{n}{k-1}(x)^{3n-5(k-1)} \\ &\Longleftrightarrow \quad (x)^{2n-3(k-1)} = (x)^{3n-5(k-1)} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2n-3(k-1) = 3n-5(k-1) \\ &\Longleftrightarrow \quad n = 2\underbrace{(k-1)}_{s} \end{aligned}$$

4. Ejercicios Propuestos del Teorema del Binomio

(1) Determine el séptimo término en el desarrollo binomial

$$(2x-y)^{12}$$

(2) Determine el noveno término en el desarrollo binomial

$$\left(2+\frac{x}{4}\right)^{15}$$

(3) Determine el decimocuarto término del desarrollo binomial

$$\left(4x^2y-\frac{1}{2xy^2}\right)^{20}$$

(4) Determine el término que contiene a x^2 en el desarrollo binomial $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)^{27}$

(5) Determine el término que contiene $\dfrac{x^2}{y^2}$ en el desarrollo binomial

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y^2}{2x^2}\right)^{8}$$

(6) Determine el término que contiene a x^r en el desarrollo binomial $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n}$

(7) Si uno de los términos en el desarrollo binomial $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{60}$ es de la forma $a\cdot x^{-54}$. Determine el valor de a

(8) Determine el término independiente de x (si existe) en el desarrollo binomial $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{30}$

(9) Determine el valor de a en el desarrollo binomial $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{x}\right)^{20}$, de tal forma que el término independiente de x sea igual al coeficiente de x^2

(10) En el desarrollo binomial $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$ " el coeficiente binomial" del $3^{\underline{\text{er}}}$ término es mayor que el coeficiente binomial del $2^{\underline{\text{do}}}$ término en 44 unidades. Determine, si existe, el término independiente de x.

(11) Muestre que el coeficiente del término central del desarrollo binomial $(1+x)^{2n}$, es igual a la suma de los coeficientes de los dos términos centrales del desarrollo binomial $(1+x)^{2n-1}$

(12) Dados los desarrollos binomiales $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^n$, y $\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$. Determine el conjunto

$$T \quad = \quad \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ Los terceros términos de los binomios sean iguales}\}$$

(13) Si en el desarrollo binomial $(1+x)^{43}$, los coeficientes de la posición $(2m+1)$ y $(m+2)$ son iguales. Determine, si es posible, el valor de m

(14) Determine el coeficiente de x^n en el desarrollo binomial $(1 - x + x^2)(1+x)^{2n+1}$

(15) En el desarrollo binomial $\left(\dfrac{x}{a} - y^2\right)^{15}$, el término que contiene a y^{22} presenta el coeficiente numérico $-\dfrac{455}{27}$. Determine el valor de a

(16) Demuestre que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

(17) Considere los reales positivos p y q tales que, $p + q = 1$. Demuestre que

$$r_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} (k \cdot r_k) = n \cdot p.$$

Bibliografía

[1] Bello, I. "Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "Álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "Álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "Álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "Álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice

Contenidos