

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias de la Computación

Tarea No. 1 Matemáticas Elementales

Profesor Fco. Javier Robles Mendoza

Lógica y Conjuntos

1. Considere las proposiciones siguientes: p : “esta lloviendo”, q : “ el sol esta brillando”, r : “hay nubes en el cielo”. Traduzca lo siguiente a notación lógica, utilizando p , q , r y conectivos lógicos.

- a) Esta lloviendo y el sol esta brillando.
- b) Si esta lloviendo, entonces hay nubes en el cielo.
- c) Si no esta lloviendo, entonces el sol no esta brillando y hay nubes en el cielo.
- d) El sol esta brillando si y solo si no esta brillando.
- e) Si no hay nubes en el cielo, entonces el sol esta brillando.

2. Sean p , q , r como en el problema 1. Traduzca lo siguiente a oraciones en español.

a) $(p \wedge q) \rightarrow r$, b) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, c) $\neg p \leftrightarrow (q \vee r)$, d) $\neg(p \leftrightarrow (q \vee r))$, e) $\neg(p \vee q) \wedge r$.

3. Determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes.

- a) $3 + 3 = 6 \wedge 1 + 2 = 5$
- b) No es cierto que $3 + 3 = 6 \vee 1 + 2 = 3$
- c) Es cierto que $2 + 2 \neq 4 \wedge 1 + 2 = 3$
- d) No es cierto que $3 + 3 \neq 0 \vee 1 + 2 \neq 5$.

4. Escriba las reciprocas de las proposiciones siguientes.

- a) $q \rightarrow r$
- b) Si soy listo entonces soy rico
- c) Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 8$
- d) Si $x^2 = x$ entonces $x = 0 \vee x = 1$.

5. Proporcione las contrarreciprocas de las proposiciones del problema 4.

6. Sean p , q , r , s cuatro proposiciones simples cuyos valores de verdad son: p verdadera, q verdadera, r verdadera, s falsa. Diga cuales de las proposiciones compuestas que aparecen a continuación son verdaderas.

- i) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (s \rightarrow r)$
- ii) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow s)]$

iii) $p \rightarrow [q \rightarrow (r \rightarrow s)]$

iv) $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \wedge \neg s)$

v) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (s \leftrightarrow r)$.

7. a) Sea p una proposición tal que para cualquier proposición q , es verdadera la proposición $p \vee q$. ¿Que puede decirse sobre el valor de p .

b) Si $p \leftrightarrow q$ es verdadera, ¿qué puede decirse sobre $p \vee \neg q$?

c) Si p es una proposición verdadera y q es una proposición falsa, encuentre el valor de verdad de

$$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p).$$

d) Determine el valor de verdad de las proposiciones p y q si se conoce la información siguiente: $\neg p \vee \neg q$ es verdadero y $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$ es verdadero.

e) Supóngase que sabemos que $p \rightarrow q$ es falso. Proporcione los valores de verdad para : $p \wedge q$, $p \vee q$, $q \rightarrow p$.

8. Construir la tabla de verdad de las proposiciones siguientes: a) $p \vee p$, b) $p \wedge \neg q$, c) $(p \wedge q) \rightarrow r$, d) $(r \vee s) \wedge \neg(r \wedge s)$, e) $\neg(p \wedge q) \vee r$, f) $p \rightarrow \neg(q \wedge r)$, g) $q \leftrightarrow (\neg q \wedge p)$, h) $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge q)$.

9. Diga cuales de las proposiciones siguientes son tautologías: a) $p \leftrightarrow q$, b) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$,

c) $\neg[(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)]$.

10. Traducir a forma simbólica y comprobar la validez de los razonamientos siguientes:

a) Si 6 es par, entonces no divide a 7

5 no es primo o 2 divide a 7

Pero 5 es primo

b) En el cumpleaños de mi esposa le llevare flores

Es el cumpleaños de mi esposa o trabajo hasta tarde

Hoy no le lleve flores a mi esposa

Por tanto 6 es impar

Por tanto, hoy trabaje hasta tarde

c) Si el hombre tiene conciencia y el hombre tiene libertad,

entonces el hombre es responsable de sus actos

El hombre tiene conciencia

El hombre tiene libertad

Luego...

El hombre tiene conciencia y el hombre tiene libertad

El hombre es responsable de sus actos.

d) Si estudio medicina o estudio filosofía, entonces ingresare a la UNAM

Si obtengo una beca, entonces estudio filosofía o estudio medicina

Obtengo una beca

Luego...

Estudio filosofía o estudio medicina

Estudio medicina o estudio filosofía

Ingresaré a la UNAM.

11. En los siguientes ejemplos de argumentos, expresados en lenguaje simbólico, indique la ley para obtener cada conclusión.

a) $\neg p \vee \neg q$

$t \rightarrow (p \wedge q)$

$\neg t \rightarrow s$

Luego...

$\neg(p \wedge q)$

$\neg t$

s

b) $(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow r)$

$\neg r$

p

$\neg q \rightarrow (s \vee t)$

$\neg s$

$t \rightarrow w$

Luego...

$p \vee q$

$q \rightarrow r$

$\neg q$

$s \vee t$

t

w

12. Sea A un conjunto de números reales que cumple las proposiciones siguientes (axiomas):

Axioma 1) $3 \in A$

Axioma 2) $x \in A \rightarrow 3x + 1 \in A$

Axioma 3) $x \in A \wedge y \in A \rightarrow x + y \in A$

Demuestre, usando el método directo, las proposiciones siguientes:

Teorema 1. Si $7 \in A$ entonces $25 \in A$

Teorema 2. Si $2 \in A$ entonces $27 \in A$.

13. Sea A un conjunto de números reales que cumple las proposiciones siguientes (axiomas):

Axioma 1) $5 \in A$

Axioma 2) $x \in A \wedge y \in A \rightarrow x + y \in A$

Demuestre, usando la contrarreciproca, las proposiciones siguientes:

Teorema 1. *Se tiene que $13 \notin A$ entonces $4 \notin A$*

Teorema 2. *Si $(3x - 6) \notin A$ entonces $(x \notin A \vee -11 \notin A)$.*

14. Sea B un conjunto de números reales que cumple las proposiciones siguientes (axiomas):

Axioma 1) $3 \in B$

Axioma 2) $x \in B \wedge y \in B \rightarrow xy \in B$

Axioma 3) $6 \notin B$

Demuestre, usando el método de reducción al absurdo, las proposiciones siguientes:

Teorema 1. *Se cumple que : $\frac{5}{2} \in B \rightarrow \frac{4}{5} \notin B$*

Teorema 2. *Si $\frac{1}{x} \in B$ entonces $\sqrt{2x} \notin B$.*

15. Demuestre, usando el método directo, que el producto de dos números enteros impares es impar.

16. Demuestre que si n es entero y $n^2 + 5$ es impar, entonces n es par, usando:

a) Demostración directa, b) Demostración por reducción al absurdo.

17. Determine el valor de verdad de las proposiciones siguientes, si $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

a) $\exists x \in U: x^2 - 8 = 0$, b) $\forall x \in U: x^2 - 8 \neq 0$, c) $\forall x \in U: x^4 - 1 > 0$, d) $\exists x \in U: x^4 - 1 > 0$,

e) $\exists x \in U: x^3 - 8 < 0$, f) $\forall x \in U: x^3 - 8 > 0$, g) $\exists x \in U: x - 6 \notin 0$, h) $\exists x \in U: x^3 + 8 > 0$.

18. Sea $p(x) = "x$ es par" y $q(x) = "x$ divide a 44", x toma valores en los naturales. Traslade las proposiciones simbólicas siguientes a frases.

a) $\exists x, p(x) \wedge q(x)$

b) $\forall x, p(x) \rightarrow q(x)$

c) $\exists x, \neg(p(x) \wedge q(x))$

d) $\exists x, p(x) \vee p(x)$

e) $\exists x, (p(x) \rightarrow q(x)) \vee (\neg p(x) \wedge \neg q(x))$.

19. Niegue las proposiciones del problema **17**.

20. Diga que clase de cuantificador (existencial o universal) usaría en las proposiciones siguientes:

a) $p(x): x + 8 = 0$

b) $q(x): x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

c) $p(x): x^2 + 8x = 10$

d) $q(x): (x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

e) $r(x): x^2 = x$.

21. Proporcione la negación de cada proposición.

a) Todos los triángulos isósceles son triángulos equiláteros.

b) Algunos componentes de los equipos electrónicos no son funcionales.

c) Nadie mayor de 30 años es confiable.

d) Algunos algoritmos de programación lineal tienen tiempo de corrida polinomial.

e) Todos los grafos conexos son grafos con arboles generadores.

22. Niegue las proposiciones siguientes:

a) $\exists x, \forall y p(x, y)$, b) $\forall x \forall y, p(x, y)$, c) $\exists x, \forall y [p(x) \rightarrow q(y)]$ d) $\exists x \exists y, [p(x) \wedge \neg q(y)]$.

23. Basándose en los requisitos para definir un conjunto, identifique entre los siguientes incisos cuales pueden considerarse conjuntos, cuales no, y responda porque.

a) Las diez mejores obras musicales de todos los tiempos.

b) Las personas que han viajado a la luna.

c) Las personas que han viajado a marte.

d) Los objetivos de una empresa.

e) Los peores programas de televisión.

f) Las diez mejores películas del año según la revista siempre.

g) Los alumnos que acreditaron Matemáticas Elementales en 2007.

24. Expresar los conjuntos siguientes por el método de extensión.

a) $A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ es par y } 5 < x \leq 18\}$

b) $B = \{\text{las letras de la palabra Matemáticas}\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 16 = 0\}$

d) $D = \{\text{las formas de especificar un conjunto}\}$

25. Especifique los siguientes conjuntos por el método de comprensión.

a) El conjunto de todos los continentes del mundo.

b) El conjunto de todos los océanos de mundo.

c) El conjunto de todos los días de la semana.

d) El conjunto formado por los números 1 y -1.

26. a) Si $A = \{1, 2\}$, encuentre 2^A (conjunto potencia de A).

b) Si $B = \{0, \{1, 2\}\}$, encuentre 2^B (conjunto potencia de B).

27. Dado el conjunto de periódicos $A = \{La\ nación, La\ prensa, El\ universal\}$, liste todos los elementos del conjunto potencia 2^A , y explique por qué las proposiciones siguientes son verdaderas:

a) $\emptyset \notin A$ pero $\emptyset \in 2^A$, b) $\{A\} \notin A$, $\{A\} \subseteq A$ pero $\{A\} \subseteq 2^A$, c) A es un elemento, pero no es un subconjunto de 2^A , d) $\{La\ prensa\} \notin A$ pero $\{La\ prensa\} \in 2^A$.

28. Sean los conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{x|x^2 = 4, x\ es\ positivo\}$, $C = \{x|x\ es\ par\}$, $D = \{x|x^2 - 6x + 8 = 8\}$. Completar las proposiciones siguientes escribiendo los símbolos \subseteq , \supseteq ó $\not\subseteq$ entre cada par de conjuntos.

a) $A \subseteq B$, b) $A \subseteq D$, c) $A \subseteq C$, d) $B \subseteq D$, e) $B \subseteq C$, f) $C \subseteq D$.

29. Sea el conjunto universal $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, g\}$, y $C = \{b, c, f, g\}$. Hallar:

a) $A \cup C$, b) $B \cap A$, c) $B \cap \phi$, d) $(A \cap B) - C$, e) $C - B$, f) B^C , g) $A \cup \phi$, h) $A^C - B$, i) $B^C \cup C$, j) $(A - C)^C$,

k) $(A - B^C)^C$, l) $(A \cap A^C)^C$, m) $\Omega - C$, n) $B^C \cap (C - A)$, ñ) $A \cap (B \cup C)$, o) $(A \cup B) - (C - B)$.