El Teorema Fundamental del Cálculo

Indice

1. Introducción.

El Teorema fundamental del Cálculo, como su nombre lo indica es un importante resultado que relaciona el Cálculo Diferencial con el Cálculo Integral. En este capítulo se estudiarán las bases que permiten diseñar técnicas para el cálculo de integrales.

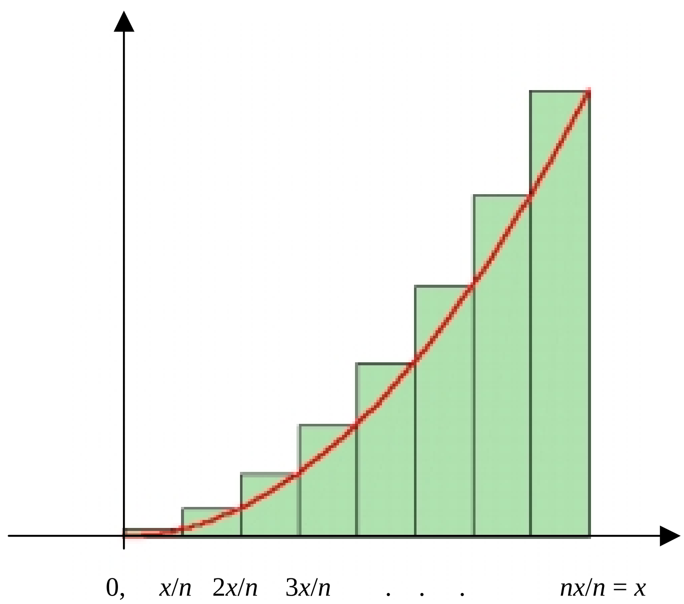
Regresar al índice

2. Algunas Fórmulas generales para encontrar áreas e integrales.

El mismo procedimiento que utilizamos para encontrar las integrales definidas en intervalos [a, b] del capitulo anterior puede aplicarse en forma más general. Por ejemplo es posible deducir ciertas fórmulas para predecir las áreas, por medio de las cuales se puede determinar del área de cualquier región bajo una curva fácil y rápidamente.

Ejemplo 1. Utilizando sumas superiores encuentre $\int_0^x t^2 dt$, para $x > 0$

Solución. Dividamos el intervalo [0, x] en n partes iguales, cada una de longitud x/n.
Sobre cada uno de los subintervalos determinado por esta partición, tomamos como altura la imagen del extremo derecho, por ser creciente la función.



La suma superior S_n nos queda como:

$$S_n = \frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n}\left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \frac{x}{n}\left(\frac{3x}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{x}{n}\left(\frac{nx}{n}\right)^2$$

$$S_n = \frac{x^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{x^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{x^3}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

y el valor de la integral será:

$$\int_0^x t^2 dt = \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{x^3}{6}(1)(2) = \frac{x^3}{3}$$

es decir

$$\boxed{\int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}}$$

<u>Observación</u>. Esta fórmula general nos permite encontrar rápidamente que:

$$\int_0^3 t^2 dt = 9, \qquad \int_0^5 t^2 dt = \frac{125}{3}, \quad \text{y en particular} \quad \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3},$$

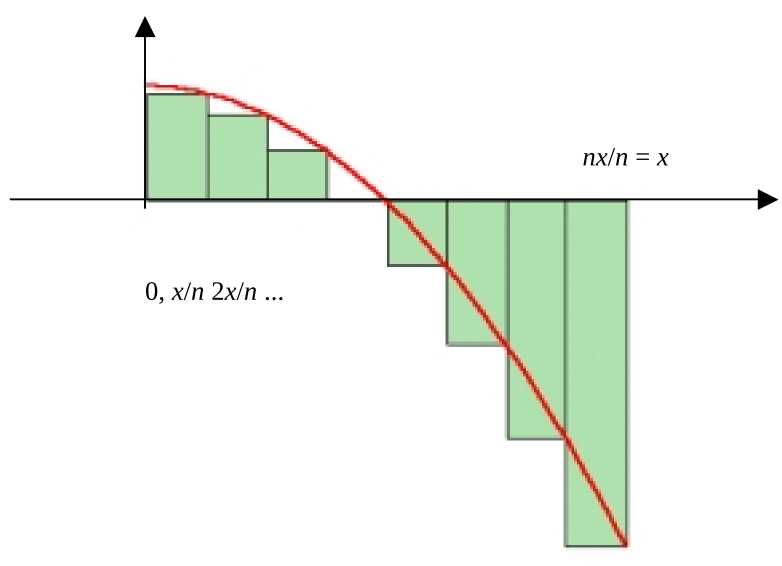
esta última calculada con sumas superiores e inferiores en el capítulo anterior.

Ejemplo 2. Utilizando sumas superiores encuentre que $\int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4}$, para $x > 0$

Solución. Se deja como ejercicio

Ejemplo 3. Utilizando sumas inferiores, encuentre $\int_0^x (4 - t^2) dt$

Solución. Por ser decreciente la función, las alturas serán las imágenes de los extremos derechos de los intervalos. En la gráfica se muestra la función para un valor de $x > 2$



quedando la suma inferior como:

$$S_n = \frac{x}{n}(4-\frac{x^2}{n^2}) + \frac{x}{n}(4-\frac{2^2x^2}{n^2}) + \frac{x}{n}(4-\frac{3^2x^2}{n^2}) + ... + \frac{x}{n}(4-\frac{n^2x^2}{n^2})$$

$$S_n = \frac{x}{n}(4n) - \frac{x^3}{n^3}(1^2+2^2+3^2+...+n^2) = 4x - \frac{x^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 4x - \frac{x^3}{6}(\frac{n+1}{n})(\frac{2n+1}{n})$$

y el valor de la integral será:

$$\int_0^x (4-t^2)\,dt = \lim_{n\to\infty} 4x - \frac{x^3}{6}(\frac{n+1}{n})(\frac{2n+1}{n}) = 4x - \frac{x^3}{6}(1)(2) = 4x - \frac{x^3}{3}$$

es decir

$$\boxed{\int_0^x (4-t^2)\,dt = 4x - \frac{x^3}{3}}$$

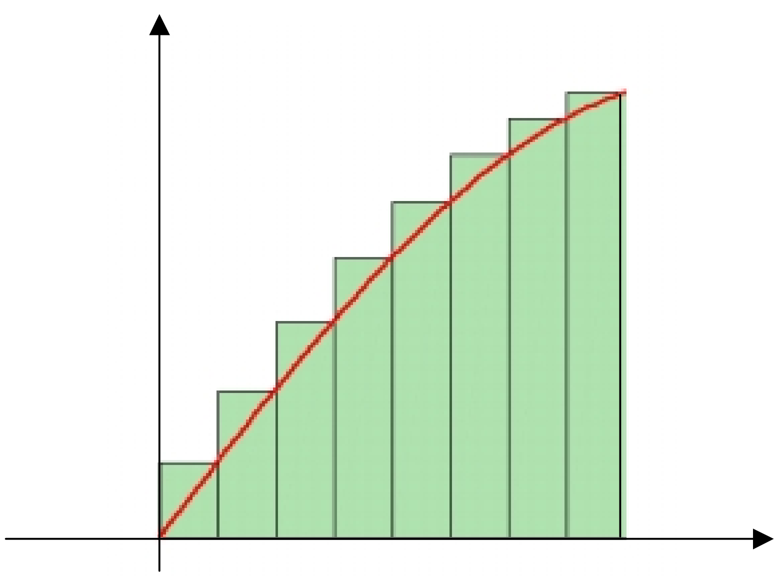
<u>Observación.</u> De nuevo con esta fórmula general podemos encontrar integrales como:

$$\int_0^1 (4-t^2)\,dt = \frac{11}{3}, \qquad \int_0^2 (4-t^2)\,dt = \frac{16}{3}, \qquad \int_0^3 (4-t^2)\,dt = 3, \qquad \int_0^4 (4-t^2)\,dt = -\frac{16}{3}$$

las dos primeras representando el área bajo la curva, por ser la función positiva en los correspondientes intervalos de integración, no sucediendo lo mismo en las otras dos, en cuyos intervalos la función toma valores positivos y negativos.

Ejemplo 4. Utilizando sumas superiores, encuentre $\int_0^x sent\ dt$, para $x \in [0, \pi/2]$

Solución. Por ser creciente la función, las alturas serán las imágenes de los extremos derechos de los intervalos, como se observa en la siguiente gráfica.



Calculemos la suma superior correspondiente:

$$S_n = \frac{x}{n}\left[sen(\frac{x}{n}) + sen(\frac{2x}{n}) + sen(\frac{3x}{n}) + ... + sen(\frac{nx}{n}) \right]$$

multiplicamos y dividimos el lado derecho por $2sen(\frac{x}{2n})$, tenemos que:

$$\mathrm{S_n} = \frac{\mathrm{x/n}}{2\,\mathrm{sen(x/2n)}}\left[2\,\mathrm{sen}(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}})\,\mathrm{sen}(\frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{n}}) + 2\,\mathrm{sen}(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{n}})\,\mathrm{sen}(\frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{n}}) + ... + 2\,\mathrm{sen}(\frac{\mathrm{nx}}{\mathrm{n}})\,\mathrm{sen}(\frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{n}}) \right]$$

utilizando la identidad trigonométrica 2sen$U$ sen$V$ = cos(U-V) - cos(U+V), obtenemos:

$$S_n = \frac{x/n}{2sen(x/2n)}\left[\cos(\frac{x}{2n}) - \cos(\frac{3x}{2n}) + \cos(\frac{3x}{2n}) - \cos(\frac{5x}{2n}) + ... + \cos(\frac{(2n-1)x}{2n}) - \cos(\frac{(2n+1)x}{2n}) \right]$$

cancelando:

$$S_n = \frac{x/2n}{sen(x/2n)}\left[\cos(\frac{x}{2n}) - \cos(\frac{(2n+1)x}{2n}) \right]$$

utilizando el hecho de que $\lim_{h\to 0} \frac{h}{senh} = 1$

$$\int_0^x sent\ dt = \lim_{n\to\infty} \frac{x/2n}{sen(x/2n)}\left[\cos(\frac{x}{2n}) - \cos(\frac{(2n+1)x}{2n}) \right] = 1(1-\cos x)$$

es decir

$$\boxed{\int_0^x sent\ dt = 1 - \cos x}$$

Regresar al índice

3. La Integral como función del extremo superior

Cada una de las fórmulas generales obtenidas puede considerarse como una función de la variable x y por lo tanto es susceptible de analizarse con las herramientas del Cálculo Diferencial, como la continuidad, límites, derivación, etc.

$$\int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}, \qquad \int_0^x t^3\, dt = \frac{x^4}{4}, \qquad \int_0^x sent \quad dt = 1 - \cos x$$

Algo en común que puede observarse en cada una de estas funciones es que son continuas, derivables y además la derivada de cada una, es la función que se está integrando, es decir,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t^2 dt = x^2, \qquad \frac{d}{dx}\int_0^x t^3 dt = x^3, \qquad \frac{d}{dx}\int_0^x sent\ dt = senx,$$

Si le llamamos $G(x)$ a la integral y $f(t)$ al integrando, para estas integrales se cumple:

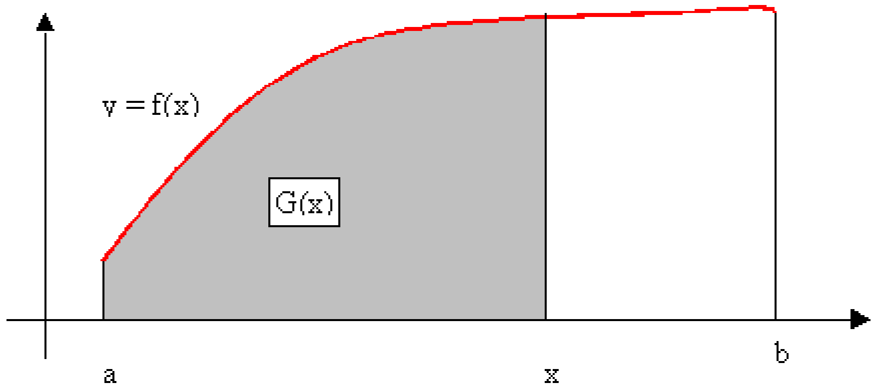
$$G(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad G'(x) = f(x)$$

o bien

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\, dt = f(x)}$$

Un poco más adelante demostraremos que salvo ciertas precisiones, lo anteriormente dicho es válido para f continua y lo estableceremos como uno de los teoremas más importantes del Cálculo, el que establece la relación entre los conceptos fundamentales de Derivada e Integral.

Sea f:[a, b]$\rightarrow$ R una función monótona y por lo tanto integrable.



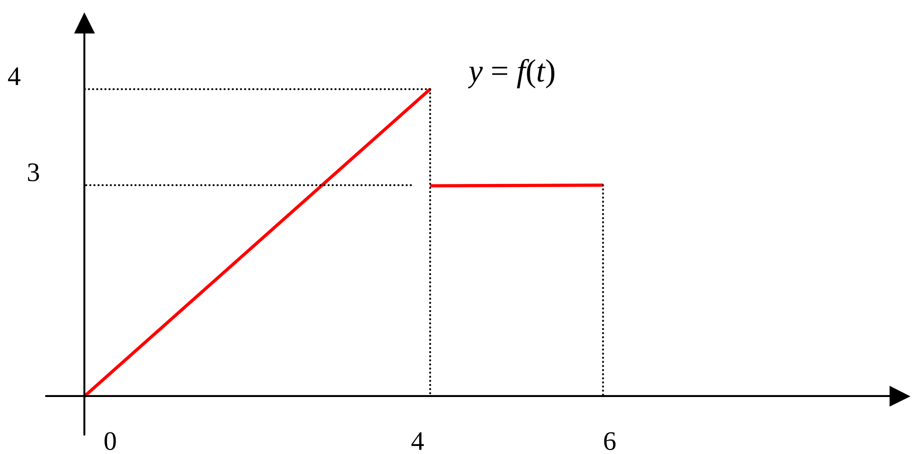
Definimos $G:[a, b] \rightarrow \mathrm{R}$ como:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Si la función es positiva $G(x)$ representa el área desde a hasta x.

La primera propiedad interesante de la integral como función es que si la función f es integrable, entonces la función G es continua, pues intuitivamente podemos ver que si variamos "un poco" la x, el valor de $G(x)$ no cambia sensiblemente, aún cuando el integrando no sea una función continua. Esto lo podemos apreciar en el siguiente caso particular y posteriormente lo demostraremos en general.

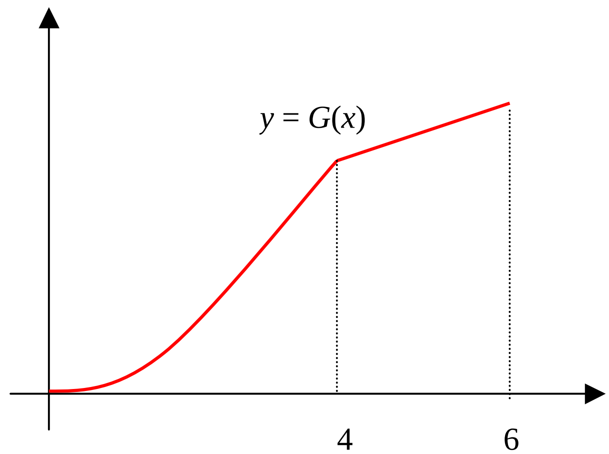
Sea $f:[0, 6] \rightarrow \mathrm{R}$ la función cuya gráfica es:



a) Si $0 \le t \le 4$, el valor de la integral de esta función es: $G(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{x^2}{2}$

b) Si $4 < t \le 6$, el valor de la integral es: $G(x) = \int_0^x f(t)dt = 8 + 3(x-4) = 3x - 4$

Así pues G:[0, 6] $\to$ R estará dada por la siguiente función continua.



En el siguiente Teorema, probaremos la relación antes mencionada entre la derivada y la integral, que nos permitirá calcular integrales con la herramienta del Cálculo Diferencial sin recurrir a la definición de integral como límite de sumas.

Regresar al índice

4. El Teorema Fundamental del Cálculo.

Si f:[a, b] $\to$ R integrable es continua en $x_o \in$ [a, b], entonces

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es derivable en x_o y $G'(x_o) = f(x_o)$.

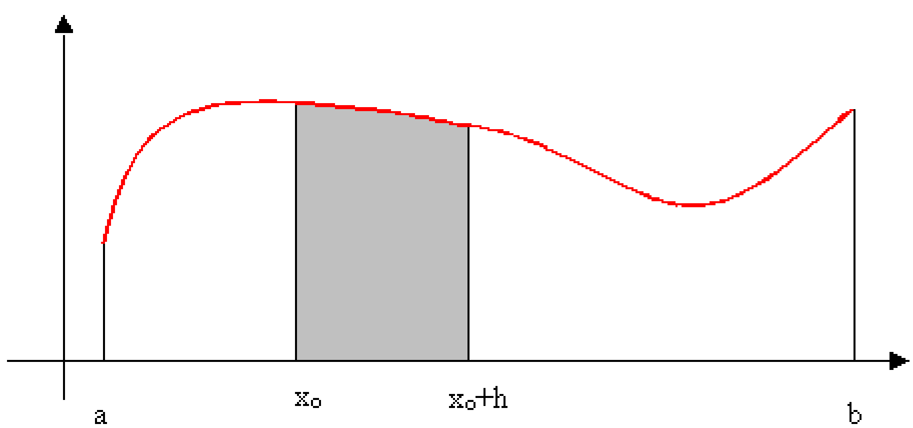
En notación de Leibniz podemos expresar el resultado de este teorema como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{ó bien} \qquad \frac{d}{dx}\int f = f$$

que de una manera más clara muestra la relación, entre la Derivada y la Integral, como operaciones inversas

Demostración.

Primer caso: Sea $h > 0$:



$$G(x_o + h) - G(x_o) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

por el teorema del valor medio para integrales en el intervalo [x_o, x_o+h], tenemos que

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_h) \bullet h$$

para algún valor x_h entre x_o y x_o+h y en consecuencia

$$G(x_o + h) - G(x_o) = f(x_h) \bullet h$$

Para calcular la derivada de *G* en x_o , calculamos el siguiente límite:

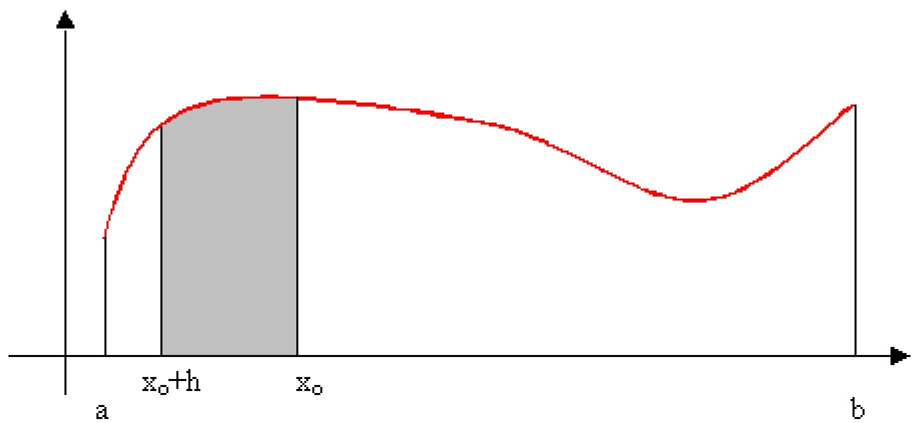
$$G'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x_o + h) - G(x_o)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x_h) = f(x_o)$$

pero cuando h se aproxima a cero el punto x_h se aproxima a x_o y en consecuencia

$$G'(x_o) = f(x_o)$$

que es lo que deseábamos demostrar.

Segundo caso: Sea $h < 0$:



$$G(x_o) - G(x_o + h) = \int_a^{x_0} f(t)dt - \int_a^{x_0+h} f(t)dt = \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt$$

por el teorema del valor medio para integrales en el intervalo [x_o+*h*, x_o], de longitud (-*h*), tenemos que

$$\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)dt = f(x_h) \bullet (-h)$$

para algún valor x_h entre x_o+h y x_o y en consecuencia

$$G(x_o) - G(x_o + h) = f(x_h) \bullet (-h)$$

0, bien multiplicando por -1 en ambos lados:

$$G(x_o + h) - G(x_o) = f(x_h) \bullet (h)$$

y como en el caso anterior para calcular la derivada de G en x_o, calculamos el siguiente límite:

$$G'(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x_o + h) - G(x_o)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_h) = f(x_o)$$

obteniendo lo que deseábamos demostrar.

Regresar al índice

5. Cálculo de integrales definidas mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.

Ejemplo1. Utilizando el T.F.C., encuentre $\int_2^3 t^3 dt$.

Solución: En el cálculo de integrales por este método, realizaremos los siguientes cuatro pasos:

Paso 1: Consideramos a la integral como función del extremo superior.

$$G(x) = \int_2^x t^3 dt .$$

y posteriormente tratar de encontrar una expresión "más operativa" para $G(x)$, pues la integral buscada es G(3).

Paso 2: Utilizamos el T.F.C.

Por el T.F.C., $G'(x_o) = x_o^3$, para todo $x_o \in [2, 3]$, lo cual lo escribiremos genéricamente como $G'(x) = x^3$, es decir este Teorema nos da información sobre la derivada de la función buscada, en este caso sabemos que $\frac{x^4}{4}$ es una función cuya derivada es x^3, pero en general la derivada no se altera si le sumamos una constante arbitraria, lo cual nos lleva a que $G(x) = \frac{x^4}{4} + k$. En general de manera esquemática diremos:

$$G'(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad G(x) = \frac{x^4}{4} + k$$

lo cual salvo la constante por determinar, nos da una expresión "más operativa" para G(x).

Paso 3: Determinamos la constante k.

Nótese que tenemos dos expresiones para $G(x)$:

$$G(x) = \frac{x^4}{4} + k \qquad \text{y} \qquad G(x) = \int_2^x t^3 dt .$$

Para determinar la constante k, debemos conocer a la integral en algún valor del intervalo, que en este caso es $x = 2$, es decir

$$G(2) = \int_2^2 t^3 dt = 0 .$$

Y por la otra expresión $G(2) = 4 + k$.

Igualando ambas expresiones obtenemos

$$4 + k = 0$$

obteniendo el valor de k = -4

Paso 4: Evaluamos *G*(3) para obtener la integral.

Una vez determinada la constante de integración k, queda completamente determinada la expresión para *G*:

$$G(x) = \frac{x^4}{4} - 4$$

y en consecuencia:

$$\int_2^3 t^3 dt = G(3) = \frac{3^4}{4} - 4 = \frac{65}{4}.$$

Es decir

$$\boxed{\int_2^3 t^3 dt = \frac{65}{4}}$$

Ejemplo2. Utilizando el TFC, encuentre $\int_0^{\pi} sentdt$.

Solución: Cada una de las siguiente tres expresiones corresponden a los primeros tres pasos del ejercicio anterior:

$$G(x) = \int_0^x sent\ dt \quad \Rightarrow \quad G'(x) = senx \quad \Rightarrow \quad G(x) = -\cos x + k.$$

Para determinar la constante, evaluamos en 0

$$G(0) = \int_0^0 sent\ dt = 0.$$

Y por la otra expresión *G*(0) = -1 + *k*.

Igualando ambas expresiones obtenemos

$$-1 + k = 0$$

obteniendo el valor de *k* = 1, y en consecuencia

$$\int_0^{\pi} sent\ dt = G(\pi) = -\cos\pi + 1 = 2$$

es decir

$$\boxed{\int_0^{\pi} sent\ dt = 2}$$

Observación. Como se habrá notado en el cálculo de las integrales anteriores usando el TFC, la parte medular del procedimiento es encontrar una función que al derivarse nos da la función f que queremos integrar, a la que llamaremos **ANTIDERIVADA de f** . El valor de la constante es la antiderivada evaluada en el extremo izquierdo del intervalo de integración y finalmente el valor de la integral es la antiderivada evaluada en el extremo derecho menos la antiderivada evaluada en el extremo izquierdo, como se asienta en el siguiente:

Regresar al índice

6. Corolario al Teorema Fundamental del Cálculo

Si f:[a,b]$\to$R integrable es continua en el intervalo [a, b] y g:[a,b]$\to$R, es una antiderivada de f, es decir satisface $g'(x) = f(x)$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)}$$

Demostración. La prueba de este resultado consiste en dar los mismos pasos que en los casos particulares

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad G'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; G(x) = g(x) + k\,.$$

Para determinar la constante evaluamos en $x = a$ en las dos expresiones para $G(x)$

$G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ y $G(a) = g(a) + k$ $\Rightarrow$ $g(a) + k = 0$ $\Rightarrow$ $k = -g(a)$ y por lo tanto

$$G(x) = g(x) - g(a)\,.$$

Y el valor de la integral

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = g(b) - g(a)$$

que es lo que deseábamos demostrar.

A continuación resolveremos la integral del ejemplo 2 utilizando este corolario.

Ejemplo 3. Utilizando el corolario al TFC, encuentre $\int_2^3 x^3 dx$.

Solución. Sólo hay que encontrar una función g que satisfaga $g'(x) = x^3$ y una de tales funciones es:

$$g(x) = \frac{x^4}{4}$$

y en consecuencia:

$$\int_2^3 x^3 dx = g(3) - g(2) = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4}\,.$$

<u>Observación</u>. **Dada una función *f*, en este caso *f*(*x*) = x^3, existen una infinidad de antiderivadas, todas ellas de la forma** $g(x) = \frac{x^4}{4} + K$ **Si tomamos cualquiera de ellas como por ejemplo**

$$g(x) = \frac{x^4}{4} + 8$$

obtenemos el mismo resultado

$$\int_2^3 x^3 dx = g(3) - g(2) = (\frac{3^4}{4} + 8) - (\frac{2^4}{4} + 8) = \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4} \text{.}$$

Regresar al índice

7. La Integral Indefinida.

La parte medular para encontrar integrales definidas, es encontrando una función que al derivarla nos dé el integrando.

Si g es una función tal que $g'(x) = f(x)$, diremos que es una **PRIMITIVA** para f y a la expresión $f(x) + k$ le llamaremos **LA INTEGRAL INDEFINIDA DE *f*,** y la denotaremos por

$$\int f(x)\, dx = g(x) + k$$

Observación. Nótese que al escribir la integral indefinida escribimos la variable *x* tanto en el integrando como en la primitiva, en virtud de no existir confusión, debido a que no se escriben los límites de integración.

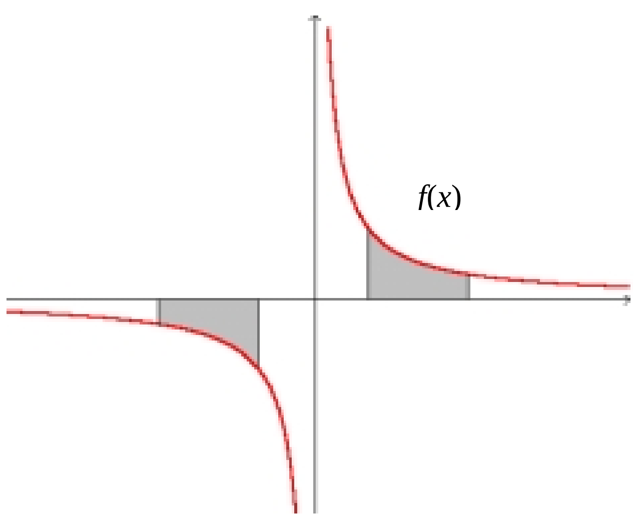
Tomando en cuenta que la derivada y la integral son operaciones inversas, de cualquier fórmula de derivación, podemos extraer una fórmula de integración, simplemente invirtiéndola, por ejemplo:

$$\frac{d}{dx} senx = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \int \cos x\, dx = senx + k$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + k \qquad para \quad x > 0$$

En este último ejemplo, debemos hacer unas precisiones. La función $f(x) = 1/x$ está definida para todo $x \neq 0$, sin embargo la función $g(x) = \ln x$ sólo está definida para los positivos. ¿Cómo obtener por ejemplo la integral de g en el intervalo [-3, -1] si el logaritmo natural no está definido para los números negativos?.

Primeramente calcularemos la integral en el intervalo [1,3] y por la simetría de $f(x) = 1/x$, la integral en el intervalo [-3, -1] será el negativo de ésta, como se aprecia en la siguiente ilustración.



$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = -\int_{1}^{3} \frac{1}{x} dx = -\left[\ln(3) - \ln(1)\right] = \ln(1) - \ln(3)$$

lo cual nos sugiere considerar

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(-x) + k \quad para\ \ x < 0$$

en general podemos expresar a la integral indefinida de esta función como:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + k$$

fórmula válida también para números negativos, pues derivando para $x < 0$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Observación. Al utilizar el corolario al T.F.C. debe tenerse cuidado de verificar las condiciones bajo las cuales se cumple dicho teorema, por ejemplo, es fácil caer en el siguiente error si no se tiene este cuidado:

$$\cancel{\int_{-3}^{2} \frac{1}{x}\, dx = \ln(2) - \ln(3)}$$

Esta expresión no tiene sentido ya que la función no es acotada en el intervalo de integración y por lo tanto no tendría sentido el cálculo de las sumas superiores o inferiores en un intervalo de la partición que contenga al cero. La función en cuestión no es integrable en [-3,2].

Con esta observación podemos construir nuestra primera tabla de integrales, a partir de la cual y mediante algunos métodos de integración, podremos encontrar integrales de funciones más complicadas.

Regresar al índice

8 Tabla Básica de Integrales.

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \quad si\ \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$

3. $\int \cos x\, dx = senx + k$

4. $\int senx\, dx = -\cos x + k$

5. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + k$

6. $\int \csc^2 dx = -\cot + k$

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + k$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsenx + k$

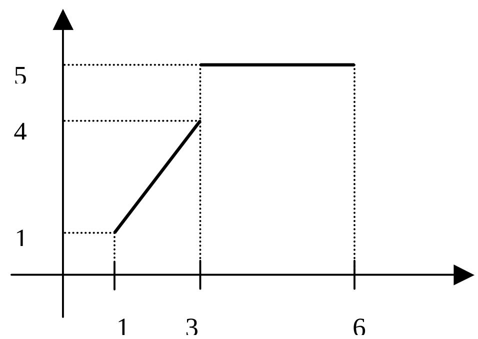
9. $\int e^x\, dx = e^x + k$

10 $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$

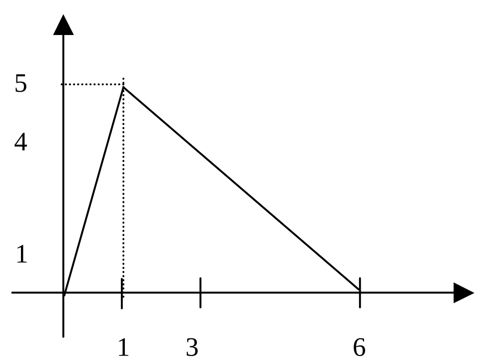
Regresar al índice

Ejercicios

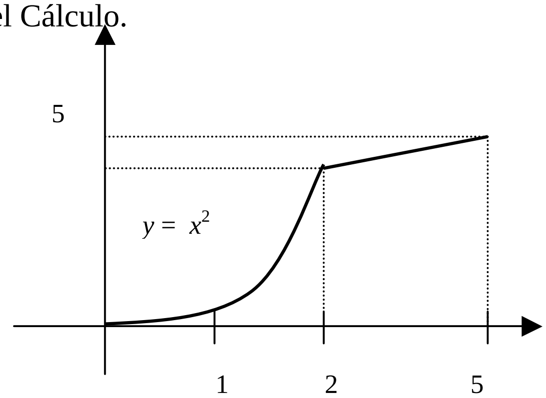
I. Dada la función $f(x)$ como en la siguiente gráfica, encuentre la función $G(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, grafíquela y verifique que G es continua.



II. Dada la función $f(x)$ como en la siguiente gráfica, encuentre la función $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, grafíquela y verifique que cumple con el Teorema Fundamental dl Cálculo.



III. Dada la función $f(x)$ como en la siguiente gráfica, encuentre la función $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, grafíquela y verifique que cumple con el Teorema Fundamental del Cálculo.



IV. Utilizando el *Teorema Fundamental del Cálculo,* encuentre el valor de las siguientes integrales.

1) $\int_0^1 (5t^3 - 7)dt$

2) $\int_a^b t^3 dt$

3) $\int_1^2 t^5 dt$

4) $\int_2^3 \frac{1}{t^4} dt$

5) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos t\, dt$

6) $\int_4^9 \sqrt{t}\ dt$

7) $\int_0^1 e^t dx$

8) $\int_{-1}^1 \sec^2 t\, dt$

9) $\int_1^2 \frac{t^2 + t^3 - t^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{3}{2}}} dt$

10) $\int_2^3 \frac{1-t}{t} dt$

11) $\int_0^{2\pi} sent\ dt$

12) $\int_0^{\pi} \cos t\, dt$

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sent\, dt$

14) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\ dt$

V. Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, encuentre en cada caso $f\,'(x)$.

1) $f(x) = \int_3^{x^2} sent\, dt$

2) $f(x) = \int_3^{5x-4} \cos^3 t\, dt$

3) $f(x) = \int_{2x+3}^{x^3} t^5 \, dt$

4) $f(x) = \int_{3}^{2x} e^{t^2} \, dt$

Regresar al índice