BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

BANCO DE PREGUNTAS

CURSO: ALGEBRA LINEAL
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

MC Fco. Javier Robles Mendoza
Otoño 2008

Capitulo 1 El espacio vectorial $\mathbb{R}^{n}$

1. ¿ Que indica $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$?
2. ¿Es $\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}$ un subconjunto de $\boldsymbol{R}^{\mathbf{3}}$? Explique.
3. ¿Que condición se debe cumplir para que dos vectores sean iguales?
4. ¿Cómo se realiza la suma de vectores?
5. ¿Cómo se realiza la multiplicación por un escalar?
6. Escriba las propiedades de la suma de vectores.
7. Escriba las propiedades de la multiplicación por un escalar.
8. Explique porque las operaciones de suma y producto por escalar en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ son cerradas.
9. ¿Es la diferencia de dos vectores en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ una nueva operación en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$? Explique.
10. Defina el producto punto de dos vectores en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$.
11. Explique porque el producto punto de dos vectores es un número real.
12. Enuncie las propiedades del producto punto.
13. ¿Es cierto que si el producto punto de dos vectores es el escalar cero, entonces por lo menos uno de los vectores es el vector cero? Explique.
14. ¿Que significa que dos vectores en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ sean perpendiculares?
15. ¿Que significa que dos vectores en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ sean paralelos?
16. Defina la norma de un vector.
17. Enuncie las propiedades de la norma.
18. Escriba la desigualdad de Cauchy−Schwartz.
19. Escriba la formula para hallar el ángulo entre dos vectores.
20. ¿Qué condiciones debe cumplir una transformación de $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ a $\boldsymbol{R}^{\mathrm{m}}$ para que sea una transformación lineal?
21. ¿Que es un operador lineal?
22. ¿Es cierto que si $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}$ es una transformación lineal entonces $\boldsymbol{T}$ transforma el **cero** de $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ en el **cero** de $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}$?
23. ¿Es cierto que si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de $\mathbf{5} \times \mathbf{3}$ entonces $\boldsymbol{A}$ determina una transformación lineal $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{R}^{\mathbf{3}} \rightarrow \boldsymbol{R}^{\mathbf{5}}$? Explique.

24. Sean $\boldsymbol{T_1}: \boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R^n}$ y $\boldsymbol{T_2}: \boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R^n}$ transformaciones lineales definidas por $\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A_1 x}$ y $\boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A_2 x}$. ¿Es cierto que si $\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{x})\ \forall \boldsymbol{x} \epsilon \boldsymbol{R^n}$ entonces $\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_2}$?
25. Sea $\boldsymbol{B}$ una matriz de $\boldsymbol{4} \times \boldsymbol{6}$. Escriba el dominio y codominio de la transformación lineal definida por $\boldsymbol{B}$.
26. ¿Es cierto que una reflexión es una transformación no singular? Explique.
27. ¿Qué condición debe cumplir una transformación afín $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Au} + \boldsymbol{v}$ para que tenga inversa?

Capitulo 2 Espacios vectoriales generales

1. Escriba los tres tipos de axiomas que un conjunto junto con dos operaciones debe cumplir para ser un espacio vectorial.
2. Escriba explícitamente
   a) El vector cero de $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$
   b) El inverso aditivo del vector $(-1,-2,0,8)$ en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{4}}$
   c) El vector $5(8,-1,3,2)$ en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{4}}$
   d) El vector $(1,3,8,-1,4)+(4,2,-1,7,0)$en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{5}}$ multiplicado por el escalar -3
   e) El inverso aditivo del vector $(1,1,1,1,1,1)$ de $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{6}}$ multiplicado por el escalar -1
   f) La propiedad conmutativa de la suma de vectores en $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{4}}$
   g) El vector de $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{5}}$ multiplicado por el escalar 3 da por resultado el vector $(7,1,-1,0,4)$.
3. Escriba explícitamente
   a) El vector cero de $\boldsymbol{P}_3$
   b) El inverso aditivo del vector $1+x+x^2$ de $\boldsymbol{P}_2$
   c) La suma del vector x^5 y el vector $2x^5+x+3$ en $\boldsymbol{P}_5$
   d) El vector $(-4+8x+x^2)+(-1-10x-2x^2)$ en $\boldsymbol{P}_2$ por el escalar -1
   e) El inverso aditivo del vector $3(2-x)-10(4+x)$ en $\boldsymbol{P}_1$.
4. Escriba explícitamente
   a) El vector cero de $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{3}\times\boldsymbol{5}}$
   b) El inverso aditivo del vector $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ en $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{2}}$
   c) El vector $2\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$ en $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{3}}$
   d) El inverso aditivo del vector $[1 \quad 3]+8[2 \quad -1]$ en $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{1}\times\boldsymbol{2}}$ multiplicado por el escalar -3

e) El vector de $\boldsymbol{M_{3\times 2}}$ que sumado con el vector $3\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 8\\ 5 & -4\end{bmatrix}$ de por resultado el vector cuyos elementos son todos nulos.

5. Considere el conjunto $\boldsymbol{V}$ de polinomios de grado 2, con las operaciones usuales de polinomios. ¿Este conjunto es un espacio vectorial?
6. Enuncie las propiedades que debe cumplir un subconjunto $\boldsymbol{W}$ de un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ para que sea un subespacio de $\boldsymbol{V}$
7. ¿La condición de que un subconjunto de un espacio vectorial contenga al vector cero es una condición necesaria y suficiente para que el subconjunto sea un subespacio?
8. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz invertible de $n \times n$. Describa el espacio solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$.
9. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada de orden n. Considere el sistema no homogéneo de ecuaciones lineales $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. ¿Es el conjunto solución de este sistema un subespacio de $\boldsymbol{R^n}$.
10. Proporcione un ejemplo de un subconjunto de $\boldsymbol{R^4}$ que sea
    a) Cerrado bajo la adición, pero no cerrado bajo la multiplicación por un escalar
    b) Cerrado bajo la multiplicación por un escalar, pero no cerrado bajo la adición.

    Dichos ejemplos ilustran la independencia de estas dos condiciones.
11. a) Proporcione un ejemplo de un subconjunto de $\boldsymbol{R}^2$ que contenga al vector cero, pero que no sea un subespacio
    b) Proporcione un ejemplo de un subconjunto de $\boldsymbol{R}^3$ que contenga al vector cero, pero que no sea un subespacio

    Estos ejemplos ilustran la propiedad de que contener al vector cero es una condición necesaria pero no suficiente para que un subconjunto sea un subespacio.
12. ¿Cuál es el menor subespacio de $\boldsymbol{R}^n$ en el que se encuentra el vector cero de este espacio?
13. ¿$\mathbb{Q}^{\boldsymbol{n}}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$? Explique.
14. ¿Qué significa que un conjunto finito de vectores en un espacio

vectorial genere a dicho espacio vectorial?

15. Cierto o falso
    a) El espacio que genera un vector en $\boldsymbol{R}^3$ es una recta que pasa por el origen
    b) El espacio que generan dos vectores no nulos en $\boldsymbol{R}^3$ es un plano que pasa por el origen
    c) Un plano que pasa por el origen en $\boldsymbol{R}^3$ es un subespacio generado por dos vectores cualesquiera sobre el plano
    d) Un solo vector en $\boldsymbol{R}^3$ no puede generar un plano
    e) El espacio que generan 3 o mas vectores en $\boldsymbol{R}^3$ es todo $\boldsymbol{R}^3$
    f) $\boldsymbol{R}^3$ no puede ser generado por dos vectores.
16. ¿Qué significa que un vector sea combinación lineal de otros vectores?
17. a) Escriba dos vectores de $\boldsymbol{R}^3$ al azar. ¿Es mas probable que estos vectores sean linealmente dependientes o independientes?
    b) Escriba tres vectores de $\boldsymbol{R}^3$ al azar. ¿Es mas probable que estos vectores sean linealmente dependientes o independientes?
18. a) ¿Qué significa que un conjunto de vectores en un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ sea una base de $\boldsymbol{V}$?
    b) ¿Qué significa que un espacio vectorial $\boldsymbol{V}$ sea de dimensión finita?
19. ¿Cierto o falso? En un espacio vectorial cualquier conjunto constituido por un solo vector es linealmente independiente.
20. Sin calcular, explique porque los siguientes conjuntos no pueden ser bases de los espacios vectoriales indicados.
    a) $\{(3,-2),(6,-4)\}$ para $\boldsymbol{R}^2$
    b) $\{(0,0),(1,3)\}$ para $\boldsymbol{R}^2$
    c) $\{(1,3),(4,1),(1,1)\}$ para $\boldsymbol{R}^2$
    d) $\{(1,0,1),(2,-1,3),(-4,2,-6)\}$ para $\boldsymbol{R}^3$
    e) $\{(4,3,2),(-1,0,5),(2,7,1)\}$ para $\boldsymbol{R}^4$.
21. Sea $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial de dimensión mayor que 1. Determine si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos.
    a) Una base de $\boldsymbol{V}$ puede incluir al vector cero

b) Existe un conjunto que genera $\boldsymbol{V}$, que no es linealmente independiente
c) Hay mas de una base para $\boldsymbol{V}$
d) Existe un conjunto linealmente independiente, que no genera a $\boldsymbol{V}$.

22. Determine (con una breve explicación) si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos.
a) El conjunto $\{(-1,2),(3,-6)\}$ constituye una base para $\boldsymbol{R}^2$
b) Los vectores $(1,2,3),(-1,4,6)$ generan a $\boldsymbol{R}^3$
c) El subespacio de $\boldsymbol{R}^3$ generado por los vectores $(1,2,3),(0,1,4),(1,3,7)$ es de dimensión dos.
d) Cualquier conjunto de dos vectores linealmente independientes que generan a $\boldsymbol{R}^2$ constituye una base para $\boldsymbol{R}^2$.

23. Determine (con una breve explicación) si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos.
a) El conjunto $\{(2,0,0),(3,4,0),(200,567,0)\}$ es linealmente independiente
b) Un vector se puede sumar a cualesquiera dos vectores de $\boldsymbol{R}^3$ para obtener una base de $\boldsymbol{R}^3$
c) El numero máximo de vectores linealmente dependientes de $\boldsymbol{R}^2$ es dos
d) Si hay tres vectores linealmente independientes en un espacio vectorial, la dimensión debe ser mayor o igual que tres.

24. Determine (con una breve explicación) si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos.
a) $\{(1,0,1),(2,1,5)\}$ es una base para el subespacio de vectores $(a,b,a+3b)$ en $\boldsymbol{R}^3$.
b) Hay tres vectores linealmente independientes en $\boldsymbol{R}^2$.
c) Cualquier conjunto de tres vectores en $\boldsymbol{R}^3$ que sean linealmente independientes generan el espacio.
d) Dos vectores distintos de cero cualesquiera en $\boldsymbol{R}^2$ que no formen una base son colineales.
e) Sean v_1, v_2, v_3 vectores en $\boldsymbol{R}^3$ escritos al azar. Es probable que sean linealmente dependientes.

25. Sea $\boldsymbol{V}$ un espacio vectorial de dimensión $\boldsymbol{n}$. Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) $\boldsymbol{n}$ es el numero máximo de vectores linealmente dependientes en $\boldsymbol{V}$.

b) $\boldsymbol{n}$ es el numero máximo de vectores linealmente independientes en $\boldsymbol{V}$.

c) Ningún conjunto de menos de $\boldsymbol{n}$ vectores genera a $\boldsymbol{V}$.

d) Cualquier conjunto de mas de $\boldsymbol{n}$ vectores en $\boldsymbol{V}$ debe ser linealmente dependiente.

e) Un conjunto de mas de $\boldsymbol{n}$ vectores genera a $\boldsymbol{V}$, pero no puede ser linealmente dependientes.