BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

APUNTES

CURSO: ALGEBRA SUPERIOR
INGENIERIA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

MC Fco. Javier Robles Mendoza

Primavera 2009

Capitulo 1 INDUCCION MATEMATICA

La capacidad para descubrir patrones es una de las claves para el éxito en la resolución de problemas matemáticos. Considere el patrón siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \end{aligned}$$

Las sumas son todos cuadrados perfectos: 1^2, $2^2, 3^2, 4^2, 5^2$. Parece razonable conjeturar que este patrón continuara siendo valido; es decir, la suma de los números impares consecutivos, comenzando en 1, siempre será un cuadrado perfecto. Intentemos ser más precisos. Si la suma es n^2, entonces el último número impar de la suma será $2n-1$. (Verifique esta afirmación en los cinco casos anteriores). En símbolos, nuestra conjetura se convierte en

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad \text{para toda } n \geq 1 \qquad (1)$$

Nótese que la formula (1) es en realidad una colección *infinita* de proposiciones, una para cada valor de $n \geq 1$. Aunque nuestra conjetura parece razonable, no podemos suponer que el patrón continua; necesitamos demostrarlo. Aquí es donde interviene la ***inducción matemática***. La inducción matemática es un método de demostración que generalmente se utiliza cuando se trata de establecer la veracidad de una lista infinita de proposiciones. El método es bastante natural para usarse en una variedad de situaciones en ciencias de la computación. Algunas aplicaciones tienen un sabor muy matemático, tal como verificar que todo entero positivo satisface cierta formula. Otra utilización frecuente es la de mostrar que un programa de computación o que un algoritmo con ciclos funciona como se espera.

Principio de inducción matemática

Sea $P(n)$ una proposición acerca del entero positivo n. Si

1. $P(1)$ es verdadera y
2. para toda $k \geq 1$, la veracidad de $P(k)$ implica la veracidad $P(k+1)$.

Entonces $P(n)$ es verdadera para toda $n \geq 1$.

La verificación de que $P(1)$ es verdadera se conoce como ***paso básico***. La suposición de que $P(k)$ es verdadera para alguna $k \geq 1$ se conoce como ***hipótesis de inducción***. El empleo de la hipótesis de inducción para demostrar que, por consiguiente, $P(k+1)$ es verdadera se conoce como ***paso de inducción***. La inducción matemática ha sido identificada con el *principio del domino* porque es análoga a demostrar que una línea de fichas de domino caerá si (1) la primera ficha puede ser derribada (paso base) y (2) al derribar cualquier ficha (hipótesis de inducción) se tira la siguiente (paso de inducción).

Ahora utilizaremos el principio de inducción matemática para demostrar la formula (1).

Ejemplo 1
Utilice inducción matemática para demostrar que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

para toda $n \geq 1$.

Solución
Para $n = 1$, la suma del lado izquierdo es precisamente 1, mientras que la del lado derecho es 1^2. En razón de que $1 = 1^2$, completamos el paso básico.
Ahora vamos a suponer que la formula es verdadera para algún entero $k \geq 1$. Es decir, supongamos que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

(Esta es la hipótesis de inducción). El paso de inducción consiste en demostrar que la formula es verdadera cuando $n = k + 1$. Observamos que cuando $n = k + 1$, el lado izquierdo de la formula (1) es

$$
\begin{aligned}
1+3+5+\cdots+(2(k+1)-1) &= 1+3+5+\cdots+(2k+1) \\
&= 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) \\
&= (1+3+5+\cdots+(2k-1))+(2k+1) \\
&= k^2+(2k+1) \text{ (por la hipótesis de inducción} \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

lo cual es lado derecho de la formula (1) cuando $n=k+1$.
Esto completa el paso inductivo, y concluimos que la formula (1) es verdadera para toda $n \geq 1$, por el principio de inducción matemática.

En el ejemplo 1, podríamos haber escrito $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ como $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ llamada notacion de sumatoria en toda la demostracion.
Ilustraremos el uso de la notación de sumatoria en los ejemplos siguientes.

1.1 Sumatorias

La notación de sumatoria es una abreviación practica para ser utilizada cuando se escribe una suma tal como

$$1+2+3+\cdots+100$$

donde queremos omitir todo excepto unos cuantos términos. Como en la notación de conjuntos, los puntos suspensivos (…) expresan que hemos establecido un patrón y que simplemente hemos excluido algunos términos intermedios. En el ejemplo anterior, es de esperar que los alumnos reconozcan que estamos sumando todos los enteros positivos desde el 1 hasta el 100. Sin embargo, los puntos suspensivos pueden ser ambiguos. Por ejemplo, ¿qué se debería interpretar a partir de la suma $1+2+\cdots+64$?
¿Es esta la suma de todos los enteros positivos desde 1 hasta 64 o simplemente de las potencias de dos, $1+2+4+8+16+32+64$? Con frecuencia es mas claro (y mas breve) utilizar la ***notación de sumatoria*** (o ***notación sigma***).
Podemos abreviar una suma de la forma

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \qquad (2)$$

como

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (3)$$

lo que nos dice que debemos sumar los términos a_i de todos los enteros i recorriendo desde 1 hasta n. Una versión alternativa de esta expresión es

$$\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$$

El subíndice i se denomina ***índice de la sumatoria***. Es una "variable muda" en el sentido de que no aparece en la suma real de la expresión (2). Por tanto, puede utilizarse cualquier letra que queramos como el índice de la sumatoria (mientras no aparezca en alguna otra parte de las expresiones que estamos sumando). De este modo, la expresión (3) también puede escribirse como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

En índice de la sumatoria no necesita partir desde 1. La suma $a_3 + a_4 + \cdots + a_{99}$ se convierte en

$$\sum_{k=3}^{99} a_k$$

Aunque podemos disponer que el índice comience en 1 reescribiendo la expresión como

$$\sum_{k=1}^{97} a_{k+2}$$

La clave para utilizar eficazmente la notación de sumatoria es reconocer los patrones.

Ejemplo 2

Escriba las sumas siguientes mediante el empleo de la notación de sumatoria.
(a) $1 + 2 + 4 + \cdots + 64$, (b) $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$, (c) $3 + 8 + 15 + \cdots + 99$

Solución

(a) Reconocemos esta expresión como una suma de potencias de 2:

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 64 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^6$$

Por tanto el índice de la sumatoria aparece como el exponente, y tenemos

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 64 = \sum_{k=0}^{6} 2^k$$

(b) Esta expresión es la suma de todos los enteros impares desde 1 hasta 99. Todo entero impar es de la forma $2k + 1$, de manera que la suma es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + \cdots + (2 \cdot 49 + 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{49} (2\mathrm{k} + 1)$$

(c) Aquí el patrón es menos evidente, pero un poco de reflexión nos revela que cada término es un cuadrado perfecto menos 1:

$$3 + 8 + 15 + \cdots + 99 = (2^2 - 1) + (3^2 - 1) + (4^2 - 1) + \cdots + (10^2 - 1)$$

$$= \sum_{k=2}^{10} (k^2 - 1)$$

Ejemplo 3

Escriba nuevamente cada una de las sumas del ejemplo 2 de manera que el índice de la sumatoria comience en 1.

Solución

(a) Si utilizamos el cambio de variable $i = k + 1$, entonces, como k recorre desde 0 hasta 6, i va desde 1 hasta 7. En razón de que $k = i - 1$, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{6} 2^k = \sum_{i=1}^{7} 2^{i-1}$$

(b)Mediante el empleo de la misma sustitución que en el inciso (a), obtenemos

$$\sum_{k=0}^{49} (2\mathrm{k} + 1) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{50} (2(\mathrm{i} - 1) + 1) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{50} (2\mathrm{i} - 1)$$

(c)La sustitución $i = k - 2$ funcionara (inténtenlo), pero es mas fácil agregar un termino correspondiente a $k = 1$, debido a que $1^2 - 1 = 0$. Por consiguiente,

$$\sum_{k=2}^{10} (k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 1)$$

Las sumatorias múltiples surgen cuando hay más de un índice de sumatoria, como sucede en el caso de las matrices. La notación

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \qquad (4)$$

significa que se suman los términos a_{ij} en la medida que i y j recorre cada uno de manera independiente desde 1 hasta n. La suma de la expresión (4) es equivalente ya sea a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

donde sumamos primero sobre j y después sobre i (siempre trabajamos de adentro hacia afuera), o

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

donde el orden de la suma esta invertido.

Ahora damos una definición inductiva de $\sum_{i=1}^{n} a_i$ que es compatible con la inducción matemática.

Definición

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n, n$ números reales. $\sum_{i=1}^{n} a_i$, denota un número real, llamado sumatoria de los números $a_1, a_2, \dots, a_n$, que satisface:

$i)\ \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$

$ii)\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}$

Ejemplo 4

Sean $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 5, a_4 = 7$. Entonces la sumatoria de estos números reales se obtiene como sigue:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 = 2$$

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{i=1}^{1} a_i + a_2 = 2 + 4 = 6$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{2} a_i + a_3 = 6 + 5 = 11$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{i=1}^{3} a_i + a_4 = 11 + 7 = 18.$$

Ejemplo 5
La sumatoria de los números reales 1, 4, 9, 16 es

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{i=1}^{3} i^2 + 16$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2} i^2 + 9\right) + 16$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{1} i^2 + 4\right) + 9\right) + 16$$

$$= \big((1 + 4) + 9\big) + 16 = 30.$$

Ejemplo 6