BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

APUNTES

CURSO: ALGEBRA LINEAL

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

MC Fco. Javier Robles Mendoza

Otoño 2008

Capitulo 1

El espacio vectorial $\mathbf{R^n}$

Este capitulo contiene una introducción a $\mathbf{R^n}$. Se presentan la adición de vectores y la multiplicación escalar, asentando así las bases para la introducción a espacios vectoriales abstractos. El producto punto conduce a la geometría en $\mathbf{R^n}$; las ideas de ángulo, magnitud y distancia se desarrollan a partir del producto punto. Este capitulo contiene también una introducción a las transformaciones lineales. Las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales serán herramientas útiles para el análisis de estos temas.

1.1 Introducción a los vectores

La localización de puntos en el plano se estudia en el marco de un sistema de coordenadas.

Por ejemplo, en la figura 1.1 cada uno de los puntos en el plano se localiza usando un **sistema de coordenadas rectangulares.** El punto A es el punto (5,3).

Figura 1.1

Además, A se encuentra a cierta distancia en determinada dirección a partir del **origen** (0,0). La distancia y la dirección se caracterizan por la longitud y la dirección del segmento de recta que va del origen O a A. A dicho segmento de recta dirigido se llama **vector de posición**, el cual se denota $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. O recibe el nombre de **punto inicial** de $\overrightarrow{OA}$, y A recibe el nombre de **punto terminal**. Hay dos formas de interpretar (5,3); se define como la localización de un punto en el plano o como un vector de posición $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

Ejemplo 1

Dibuje los vectores de posición $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (4,1), \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-5,-2)$ y $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (-3,4)$. Véase la figura 1.2

Figura 1.2

Se denota con $\mathbf{R}^2$ el conjunto de **pares ordenados** de números reales. Note el significado de ordenado aquí; por ejemplo (5,3) no es el mismo vector que (3,5). El orden es importante.

Estos conceptos se pueden extender a arreglos de tres números reales , como (2,4,3), que se puede interpretar de dos formas : como la localización de un punto en el espacio de tres dimensiones con respecto a un sistema de coordenadas $\boldsymbol{xyz}$, o como un vector de posición. Estas interpretaciones se muestran en la figura 1.3. Se denotara con $\mathbf{R}^3$ al conjunto de **tripletas ordenadas** de números reales.

Figura 1.3

Ahora se generalizaran estos conceptos con la siguiente definición.

Definición

Sea $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una sucesión de $\boldsymbol{n}$ números reales. El conjunto de dichas sucesiones recibe el nombre de espacio $\boldsymbol{n}$ y se denota $\mathbf{R}^\mathbf{n}$.

x_1 es la **primera componente** de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_2 es la **segunda componente**, y así sucesivamente.

Muchos de los resultados y técnicas que se desarrollan para $\mathbf{R}^\mathbf{n}$, donde $\boldsymbol{n} > 3$, serán herramientas matemáticas útiles, que no tienen, de manera directa, un significado geométrico. Sin embargo, los elementos de $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ se interpretan como puntos en el espacio $\boldsymbol{n}$ o como vectores de posición en el espacio $\boldsymbol{n}$. Visualizar un espacio $\boldsymbol{n}$ para $\boldsymbol{n} > 3$, resulta difícil; pero se exhorta al alumno que intente formase una representación intuitiva. Una representación geométrica con frecuencia permite hacer fácilmente un análisis algebraico. Las matemáticas que se formulen en $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ serán la generalización de la geometría en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, espacios con los que se encontrara familiarizado.

Ejemplo 2

$\mathbf{R}^4$ es la colección de todos los conjuntos de cuatro números reales ordenados. Por ejemplo, (1,2,3,4) y (-1,3/4,0,5) son elementos de $\mathbf{R}^4$.

$\mathbf{R}^5$ es la colección de todos los conjuntos de cinco números reales ordenados. Por ejemplo, (-1,2,0,7/8,9) pertenece a esta colección.

Definición

Sean $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\boldsymbol{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos elementos de $\mathbf{R}^\mathbf{n}$**.** Se dice que $\boldsymbol{u}\ y\ \boldsymbol{v}$ son **iguales** si x_1 = y_1, x_2 = y_2 ,…, x_n = y_n. Así, dos elementos de $\mathbf{R}^\mathbf{n}$ son iguales si sus **componentes correspondientes** son iguales.

Se describe ahora la estructura algebraica de $\mathbf{R^n}$**.** Las definiciones, de suma y multiplicación por un escalar siguientes, son similares a las dadas para las matrices. Observe que también las propiedades algebraicas son similares.

Definición

Sean $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\boldsymbol{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementos de $\mathbf{R^n}$ y sea $\boldsymbol{c}$ un escalar. La adición y la multiplicación por un escalar se definen de la manera siguiente:

Adición: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

Multiplicación por un escalar: $c\mathbf{u} = c(x_1, x_2, \dots, x_n) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$

Para sumar dos elementos de $\mathbf{R^n}$ se suman los componentes correspondientes. Para multiplicar un elemento de $\mathbf{R^n}$ por un escalar, se multiplica cada componente por el escalar. Observe que los elementos resultantes pertenecen a $\mathbf{R^n}$. Se dice que $\mathbf{R^n}$ es **cerrado** bajo la adición y bajo la multiplicación por un escalar.

$\mathbf{R^n}$ junto con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar de las componentes constituye un ejemplo de **espacio vectorial** cuyos elementos reciben el nombre de **vectores**.

Por consiguiente en este curso se interpretara a $\boldsymbol{R^n}$ como un espacio vectorial.

Ejemplo 3

Sean $\mathbf{u} = (-1,4,3,7)$ y $\mathbf{v} = (-2,-3,1,0)$ vectores en $\mathbf{R^4}$. Determine $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $3\mathbf{u}$.

Solución

Se tiene que: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1,4,3,7) + (-2,-3,1,0) = (-3,1,4,7)$ y $3\,\mathbf{u} = 3(-1,4,3,7) = (-3,12,9,21)$.

Observe que el vector resultante en cada operación pertenece al espacio vectorial original $\mathbf{R^4}$.

Ahora se ilustra con algunos ejemplos la interpretación geométrica de estos vectores y sus operaciones.

Ejemplo 4

Este ejemplo proporciona una interpretación geométrica de la adición de vectores. Considere la suma de los vectores $(4,1)$ y $(2,3)$. El resultado es $(4,1) + (2,3) = (6,4)$.

En la figura 1.4, se representan estos vectores como vectores de posición. Construya el paralelogramo cuyos lados son los vectores $(4,1)$ y $(2,3)$. El vector $(6,4)$, la suma, es la diagonal del paralelogramo.

Figura 1.4

En general, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en el mismo espacio vectorial, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es la diagonal del paralelogramo definido por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Véase figura 1.5. (Se utilizan las letras negritas para los vectores y las redondillas para los escalares.) Esta forma de visualizar la adición es útil en todos los espacios vectoriales.

Figura 1.5

Ejemplo 1.5

Este ejemplo proporciona una interpretación geométrica de la multiplicación por un escalar. Considere la multiplicación del vector $(3,2)$ por 2. Se tiene $2(3,2)=(6,4)$.

Observe en la figura 1.6 que $(6,4)$ es un vector con la misma dirección que $(3,2)$ y una longitud 2 veces mayor.

Figura 1.6

La dirección depende del signo del escalar. El resultado general es el siguiente. Sea $\boldsymbol{u}$ un vector y $\boldsymbol{c}$ un escalar. La direccion de $c\boldsymbol{u}$ es el mismo que el de $\boldsymbol{u}$ si $c>0$, y la direccion opuesta a $\boldsymbol{u}$ si $c<0$. La longitud de $c\boldsymbol{u}$ **es** $|c|$ la longitud de $\boldsymbol{u}$. Véase la figura 1.7

Figura 1.7

Vector cero

El vector $(0,0,\dots,0)$, que tiene $\boldsymbol{n}$ componentes iguales a cero, recibe el nombre de **vector cero** de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ y se denota por **0**. Por ejemplo, $(0,0,0)$ es el vector cero de $\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$. Se vera que el vector cero desempeña un papel fundamental en el desarrollo de los espacios vectoriales.

Vector negativo

El vector $(-1)\boldsymbol{u}$ se escribe $-\boldsymbol{u}$ y recibe el nombre de **negativo** de $\boldsymbol{u}$. Se trata de un vector con la misma magnitud y dirección que $\boldsymbol{u}$, pero en dirección opuesta a $\boldsymbol{u}$.

Sustracción

La sustracción se lleva a cabo con los elementos de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ restando los componentes correspondientes. Por ejemplo, en $\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$, $(5,3,-6)-(2,1,3)=(3,2,-9)$.

Observe que esta expresión es equivalente a

$$(5,3,-6)+(-1)(2,1,3)=(3,2,-9).$$

Por lo tanto, la sustracción no es una nueva operación en $\mathbf{R^n}$, sino una combinación de la adición y la multiplicación por -1. Solo cuenta con dos operaciones independientes en $\mathbf{R^n}$ **,** la adición y la multiplicación por un escalar.

Ahora se estudiaran algunas de las propiedades de la adición vectorial y la multiplicación de un vector por un escalar. Estas propiedades son similares a las estudiadas en las matrices.

TEOREMA

Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, y $\boldsymbol{w}$ vectores en $\mathbf{R^n}$, y $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ escalares.

- **a)** $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ **propiedad asociativa**
- **b)** $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$ **propiedad asociativa para la suma**
- **c)** $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ **elemento neutro para la suma**
- **d)** $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$ **elemento simétrico para la suma**
- **e)** $c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$ **propiedad distributiva por un escalar**
- **f)** $(c+d)\boldsymbol{u}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$ **propiedad distributiva por dos escalares**
- **g)** $(cd)\boldsymbol{u}=c(d\boldsymbol{u})$ **propiedad asociativa para el producto**
- **h)** $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ **elemento identidad para el producto**

Estos resultados se verifican al expresar los vectores en términos de sus componentes y aplicando las definiciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar, además de las propiedades de los números reales. Se proporcionan las demostraciones del inciso **a)** y el inciso **e)**.

$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ **:**

Sean $\boldsymbol{u}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ y $\boldsymbol{v}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$. Asi,

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)=(y_1+x_1,\dots,y_n+x_n)=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$.

$\boldsymbol{e})\ c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$ **:**

$$c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n))=c((x_1+y_1,\dots,x_n+y_n))=\big(c(x_1+y_{1)},\dots,c(x_n+y_n)\big)$$

$$=(cx_1+cy_1,\dots,cx_n+cy_n)=(cx_1,\dots,cx_n)+(cy_1,\dots,cy_n)=c(x_1,\dots,x_n)+c(y_1,\dots,y_n)$$

$$=\ c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$$

Algunos de los teoremas anteriores se pueden ilustrar de forma geométrica. La figura 1.8 ilustra la propiedad conmutativa de la adición vectorial. Note que la diagonal del paralelogramo que se obtiene es la misma, ya sea que se sumen los vectores en el orden $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ o en el orden $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$. Una de las consecuencias del inciso **b)** es el hecho de que se pueden escribir algunas expresiones vectoriales, sin paréntesis, como en el caso de las matrices.

Figura 1.8

Ejemplo 6

Sean $\boldsymbol{u} = (2,5,-3), \boldsymbol{v} = (-4,1,9), \boldsymbol{w} = (4,0,2)$. Determine el vector $\boldsymbol{2u - 3v + w}$.

Solución

Se tiene $\boldsymbol{2u - 3v + w} = 2(2,5,-3) - 3(-4,1,9) + (4,0,2) = (4,10,-6) - (-12,3,27) + (4,0,2)$

$$= (4 + 12 + 4, 10 - 3 + 0, -6 - 27 + 2) = (20,7,-3).$$

Vectores Columna

Hasta el momento solo se han definido los **vectores renglón**; es decir, que los componentes de un vector se expresan en forma de renglón. Se vera que a veces resulta mas conveniente utilizar los **vectores columna**, cuyas componentes se escriben en forma de columna. De nuevo se definen la adición y la multiplicación por un escalar de vectores columna en $\mathbf{R^n}$ de acuerdo a sus componentes:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad y \quad c\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ cx_n \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, en $\mathbf{R^2}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad y \quad 4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1.2 Producto punto, norma, ángulo y distancia

Conforme se construye la estructura geométrica del espacio vectorial $\mathbf{R^n}$, debe centrar la atención en el método que se utiliza para hacerlo. Aunque los resultados son, por supuesto, importantes, la forma de obtenerlos también lo es. La magnitud, el ángulo y la distancia se definen en $\mathbf{R^n}$ al generalizar las expresiones para la magnitud, el ángulo y la distancia en $\mathbf{R^2}$**.** Se extenderá el teorema de Pitágoras a $\mathbf{R^n}$. Este proceso, que consiste en extender de forma gradual conceptos familiares en formas más generales, es fundamental en las Matemáticas.

Se iniciara el estudio con la definición de producto punto de dos vectores. El *producto punto* es una herramienta que se utiliza para construir la estructura geométrica de $\mathbf{R^n}$.

Definición

Sean $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\boldsymbol{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos vectores en $\mathbf{R^n}$. El producto punto de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ se denota por $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ y se define como

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

El producto punto asigna un número real a cada par de vectores.

Ejemplo 1

Determine el producto punto de $\boldsymbol{u} = (1, -2, 4)$ y $\boldsymbol{v} = (3,0,2)$.

Solución

Se tiene que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (1 \times 3) + (-2 \times 0) + (4 \times 2) = 11$.

Propiedades del producto punto

Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbf{R^n}$ y sea c un escalar. Entonces:

1. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
2. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$
3. $c\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot c\boldsymbol{v}$
4. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$ y $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ si y solo si $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

Se verificaran las propiedades 1 y 4 y dejan las demás a cargo del alumno.

1. Sean $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\boldsymbol{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Se tiene que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$, de acuerdo con la propiedad conmutativa de los números reales.

2. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = x_1 x_1 + x_2 x_2 + \cdots + x_n x_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$, debido a que se trata de la suma de cuadrados. Por lo tanto, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$.

Además, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ si y solo si $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. Por consiguiente, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ si y solo si $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Se utilizaran estas propiedades para simplificar expresiones que incluyan productos puntos. Por ejemplo, en esta sección se usaran las propiedades para formular una expresión conveniente para el Angulo entre dos vectores en $\mathbf{R^n}$. En secciones posteriores se aprovechan estas propiedades para generalizar el concepto de producto punto a espacios de matrices y funciones.

Norma de un vector en $\mathbf{R^n}$

Sea $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2)$ un vector en $\mathbf{R^2}$. Se sabe que la longitud de este vector es $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Véase la figura 1.10. Al generalizar este resultado para definir la longitud (el nombre técnico es *norma*) de un vector en $\mathbf{R^n}$.

Figura 1.10

Definición

La **norma** (**longitud** o **magnitud**) en $\mathbf{R^n}$ se denota $\|\boldsymbol{u}\|$ y se define como $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Nota: La norma de un vector también se puede expresar en términos del producto punto: $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$

Ejemplo 2

Determine las normas de los vectores $\boldsymbol{u} = (1{,}3{,}5)$ de $\mathbf{R^2}$ y $\boldsymbol{v} = (3{,}0{,}1{,}4)$ de $\mathbf{R^4}$ **.**

Solución

De acuerdo con la definición anterior, $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$ y
$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 0 + 1 + 16} = \sqrt{26}$.

Definición

Un **vector unitario** es un vector cuya norma es igual a 1. Si $\boldsymbol{v}$ es un vector distinto de 0, entonces el vector $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\|v\|}\boldsymbol{v}$ es un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{v}$ (consulte los ejercicios siguientes). El procedimiento para construir un vector unitario en la misma dirección del vector dado recibe el nombre de **normalización** del vector.

Ejemplo 3

- **a)** Muestre que el vector (1,0) es un vector unitario.
- **b)** Determine la norma del vector (2,-1,3). Normalice el vector.

Solución

a) $\|(1{,}0)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$. Por consiguiente, $(1{,}0)$ es un vector unitario. Asimismo, se puede demostrar que (0,1) es un vector unitario en $\mathbf{R^2}$.

b) $\|(2, -1{,}3)\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$. La norma de $(2, -1{,}3)$ es $\sqrt{14}$. El vector normalizado es $\frac{1}{\sqrt{14}}(2, -1{,}3)$. Este vector también se puede expresar de la manera siguiente: $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$. Este vector unitario esta en la dirección de $(2, -1{,}3)$.

Los siguientes vectores unitarios son importantes.

$$(1,0)\ y\ (0,1) \text{ son vectores unitarios en } \mathbf{R^2}.$$

$$(1,0,0) y\ (0,1,0) \text{ y } (0,0,1) \text{ son vectores unitarios en } \mathbf{R^3}.$$

$$(1,0,\dots,0)\ y\ (0,1,\dots,0) \text{ y } (0,0,\dots,1) \text{ son vectores unitarios en } \mathbf{R^n}.$$

Ahora se expondrá un resultado matemático útil denominado la **desigualdad de Cauchy-Schwartz**. Esta desigualdad permitirá, por ejemplo, ampliar la definición de ángulo de $\mathbf{R^2}$ a $\mathbf{R^n}$.

Teorema (La desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores en $\mathbf{R^n}$, entonces $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \le \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$

Aquí, $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|$ denota el valor absoluto del número $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$.

Demostración

Primero busque un caso especial en el que $\boldsymbol{u}=0$. Si $\boldsymbol{u}=0$, entonces $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$. La igualdad se mantiene.

Ahora considere el caso en que $\boldsymbol{u}\neq 0$. La demostración de la desigualdad para este caso implica una aplicación interesante de la formula de segundo grado. Considere el vector $r\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ donde r es un número real.

De acuerdo con las propiedades del producto punto, se tiene que

$$(r\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(r\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = r^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) + 2r(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$$

Las propiedades del producto punto también indican que $(r\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(r\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \ge 0$

Combinado estos resultados, se obtiene $r^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) + 2r(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \ge 0$

Sean $a=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}, b = 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\ y\ c=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$. Por lo tanto $ar^2+br+c\ge 0$.

Esto implica que la **función cuadrática** $f(r)=ar^2+br+c$ jamás es negativa. Por lo que $f(r)$, cuya grafica es una parábola, debe tener una raíz o ninguna. Las raíces de $f(r)$ son las raíces de la ecuación $ar^2+br+c=0$

El **discriminante** proporciona información relacionada con las raíces. Si $b^2-4ac=0$, hay una raíz; si $b^2-4ac<0$, no hay raíces. Por lo tanto,

$$b^2-4ac\le 0$$

$$b^2\le 4ac$$

$$(2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2 \le 4(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$$

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2 \le (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$$

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

Al extraer la raíz cuadrada en ambos miembros, se obtiene la desigualdad de **Cauchy-Schwartz**.

$$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

Angulo entre dos vectores

Sean $\boldsymbol{u} = (a, b) y\ \boldsymbol{v} = (c, d)$ vectores de posición en $\mathbf{R^2}$. Véase la figura 1.11. Se busca una expresión para el coseno del ángulo θ formado por estos vectores.

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$$

Figura 1.11

La **ley de los cosenos** indica que

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB)cos\theta$$

Despejando $cos\theta$.

$$cos\theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2(OA)(OB)}$$

Por lo tanto, $OA^2 + OB^2 - AB^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|^2$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ((c - a)^2 + (d - b)^2)$$

$$= 2ac + 2db = 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$$

Además, $2(OA)(OB) = 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$

En consecuencia, el ángulo θ entre dos vectores en $\mathbf{R^2}$ esta dado por

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$$

Se sabe que el coseno de cualquier ángulo como θ debe satisfacer la condición $|cos\theta| \leq 1$. La desigualdad de **Cauchy-Schwartz** asegura que $\left|\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}\right| \leq 1$.

Se puede extender el concepto del ángulo entre dos vectores de $\mathbf{R^2}$ a $\mathbf{R^n}$ de la manera siguiente.

Sean $\boldsymbol{u}\ y\ \boldsymbol{v}$ dos vectores distintos de cero en $\mathbf{R^n}$. El coseno del ángulo θ entre estos vectores es

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Ejemplo 4

Determine en Angulo entre los vectores $\boldsymbol{u} = (1,0,0)\ y\ \boldsymbol{v} = (1,0,1)$ en $\mathbf{R^2}$.

Solución

Se tiene $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (1,0,0) \cdot (1,0,1) = 1$, $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$, $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Así, $cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. El ángulo entre $\boldsymbol{u}\ y\ \boldsymbol{v}$ es de $45°$.

Se dice que dos vectores diferentes de cero son **ortogonales** si el ángulo entre ellos es recto. El teorema siguiente, cuya demostración de pide al alumno en los siguientes ejercicios, ofrece una condición para la ortogonalidad.

Teorema

Dos vectores distintos de cero $\boldsymbol{u}\ y\ \boldsymbol{v}$ son ortogonales si y solo si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Ejemplo 5

Demuestre que los siguientes pares de vectores son ortogonales.

a) $(1,0) y\ (0,1)$
b) $(2,-3,1)\ y\ (1,2,4)$

Solución

Al aplicar el producto punto, se obtiene

a) $(1,0) \cdot (0,1) = (1 \times 0) + (0 \times 1) = 0$. Los vectores son ortogonales.
b) $(2,-3,1) \cdot (1,2,4) = (2 \times 1) + (-3 \times 2) + (1 \times 4) = 2 - 6 + 4 = 0$. Los vectores son ortogonales.

Los siguientes pares de vectores ortogonales son importantes.

$(1,0) y\ (0,1)$ son vectores ortogonales en $\mathbf{R^2}$.

$(1,0,0), (0,1,0)\ y\ (0,0,1)$ son vectores ortogonales en $\mathbf{R^3}$.

$(1,0, \ldots ,0), (0,1, \ldots ,0)\ y\ (0,0, \ldots ,1)$ son vectores ortogonales en $\mathbf{R^n}$.

Ejemplo 6

Determine un vector en $\mathbf{R^2}$ que sea ortogonal a $(3, -1)$. Muestre que hay muchos vectores con esta característica, los cuales se encuentran en una recta.

Solución

Suponga que el vector (a, b) es ortogonal a $(3, -1)$. Así, $(a, b) \cdot (3, -1) = 0$

$$(a \times 3) + \big(b \times (-1)\big) = 0$$

$$3a - b = 0$$

$$b = 3a$$

Por lo tanto, cualquier vector de la forma $(a, 3a)$ es ortogonal al vector $(3, -1)$. Cualquier vector de esta forma se puede expresar de la siguiente manera $a(1, 3)$.

El conjunto de estos vectores se localiza en la recta definida por el vector $(1, 3)$. Véase la figura 1.12.

Figura 1.12

Ahora se extenderán los resultados geométricos de $\mathbf{R^2}$ a $\mathbf{R^n}$.

Teorema

Sean $\boldsymbol{u}\ y\ \boldsymbol{v}$ vectores en $\mathbf{R^n}$.

$\mathbf{a}$) $\mathbf{Desigualdad\ del\ triangulo}$: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Esta desigualdad indica que la longitud de uno de los lados del triangulo no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Véase la figura 1.13 a)

$\mathbf{b}$) $\mathbf{Teorema\ de\ Pitagoras}$: Si $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} + \|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}}$. El cuadrado de la hipotenusa de un triangulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Véase la figura1.13 b).

Figura 1.13

Demostración

a) Por las propiedades de la norma,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= \|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}}\\ &\le \|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}}+2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|+\|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwartz implica que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &\le \|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}}+2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}}\\ &= (\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

Si se extrae la raíz cuadrada de cada miembro, se obtiene la desigualdad del triangulo.

b) Por las propiedades de la norma y el hecho de que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$, se obtiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= \|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}}+\|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

que constituye el teorema de Pitágoras.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre los puntos $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ y $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ en $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}$ es $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$. Se define la distancia en $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ al generalizar esta expresión de la manera siguiente.

Definición

Sean $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ y $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)$ dos puntos en $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. La distancia entre es $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ se denota $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, y se define como $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

Nota: también se puede expresar la distancia de la manera siguiente: $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$

L a figura 1.14 representa la distancia en $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}$, $\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$ y $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

Figura 1.14

Ejemplo 7

Determine la distancia entre los puntos $\boldsymbol{x} = (1, -2,3,0)$ y $\boldsymbol{y} = (4,0,-3,5)$ en $\mathbf{R^4}$.

Solución

Si aplica la formula anterior para la distancia, se obtiene

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-0)^2 + (3+3)^2 + (0-5)^2}$$
$$= \sqrt{9+4+36+25} = \sqrt{74}\,.$$

Ejemplo 8

Demuestre que la función de la distancia en $\mathbf{R^n}$ tiene la siguiente **propiedad de simetría**: $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

Solución

Sean $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Se obtiene

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

Este resultado indica que la distancia de **x** a **y** es la misma distancia de **y** a **x**. Esta propiedad es la que se desearía que naturalmente una función de distancia debiera poseer. En seguida se resumen las propiedades más importantes de la norma y la distancia. Las normas y distancias de esta sección se dedujeron del producto punto. En trabajos numéricos a menudo resulta conveniente definir otras normas y distancias formulando estas propiedades como **axiomas**—popiedades básicas que cualquier función de distancia o norma debería tener—**.** En secciones posteriores se abordaran algunas de estas ideas.

Propiedades de la norma

1.$\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$ (La longitud del vector no puede ser negativa)

2. $\|\boldsymbol{u}\| = 0$ si y solo si $\boldsymbol{u} = 0$ (La longitud del vector es 0 si y solo si se trata del vector **0**)

3. $\|c\boldsymbol{u}\| = c\|\boldsymbol{u}\|$ (La longitud de $c\boldsymbol{u}$ es $|c|$ veces la longitud de $\boldsymbol{u}$).

4. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (Desigualdad del triangulo)

Propiedades de la distancia

1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ (La longitud entre dos puntos no puede ser negativa)

2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ si y solo si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ (La distancia entre dos puntos es cero si y solo si los puntos coinciden)

3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (propiedad de simetría)(La distancia entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ es la misma que la distancia de $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{x}$)

4. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$(Desigualdad del triangulo)

(La suma de las longitudes de dos lados de un triangulo es por lo menos igual a la longitud del tercer lado)

Ahora se resumen estas estructuras geométricas en $\mathbf{R^n}$. Este tipo de geometría recibe el nombre de *Geometría Euclidiana*.

Geometría Euclidiana en $\mathbf{R^n}$

Producto punto de vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$:	$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$
Norma de un vector $\boldsymbol{u}$:	$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
Angulo entre los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$:	$cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}, \;\; 0 \leq \theta \leq \pi$
Distancia entre los puntos $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$:	$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$

1.3 Introducción a las transformaciones lineales

Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto exactamente un elemento de otro conjunto. Las funciones se emplean en muchas áreas de las Matemáticas y son importantes en las aplicaciones para describir la relación de una variable con otra. Por ejemplo, la altura que alcanza un proyectil es una función del tiempo, el costo total de producción es una función del número de artículos, y así sucesivamente. En esta sección se analiza una clase importante de funciones entre espacios vectoriales denominadas **transformaciones lineales**.

Definición

Una **transformación** $\boldsymbol{T}$ de $\mathbf{R^n}$ a $\mathbf{R^m}$, que se denota $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$, es una regla que asigna a cada vector $\boldsymbol{u}$ en $\mathbf{R^n}$ un vector único $\boldsymbol{v}$ en $\mathbf{R^m}$.

$\mathbf{R^m}$ recibe el nombre de **dominio** de $\boldsymbol{T}$ y $\mathbf{R^m}$ es el **codominio**. Se representa esta relación mediante $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{v}$ es la **imagen** de $\boldsymbol{u}$ bajo $\boldsymbol{T}$. El conjunto de imágenes recibe el nombre de **rango** de $\boldsymbol{T}$. El rango esta formado por $\mathbf{R^m}$ o una parte de este. Los términos *aplicación* o mapeo y *función* también son sinónimos de transformación.

Por ejemplo, considere la transformación $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$, definida mediante $T(x, y, z) = (2x, y - z)$. El dominio de $\boldsymbol{T}$ es $\mathbf{R^3}$ y el codominio es $\mathbf{R^2}$. La imagen de cualquier vector de $\mathbf{R^3}$ se puede determinar usando la definición. Por ejemplo, la imagen del vector $(1, 4, 2)$se puede determinar estableciendo $x = 1, y = 4$ y $z = 2$. La imagen es $(6, 4)$.

Un espacio vectorial $\mathbf{R^n}$ posee dos operaciones definidas sobre el: la adición y la multiplicación por un escalar. Las transformaciones entre espacios vectoriales con mayor importancia son aquellas que *conservan* estas estructuras lineales en el sentido siguiente.

Definición

Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores en $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ y sea c un escalar. Se dice que una transformación $\boldsymbol{T}: \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ es lineal si

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$$

$$\boldsymbol{T}(c\boldsymbol{u}) = c\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$$

La primera condición implica que $\boldsymbol{T}$ transforma la suma de dos vectores en la suma de las imágenes de dichos vectores, "la transformación de una suma es igual a la suma de transformaciones". La segunda condición implica que $\boldsymbol{T}$ transforma la multiplicación de un vector por un escalar en la misma multiplicación del escalar por la imagen. "la transformación de un escalar por un vector es igual que el escalar por la transformación del vector". Por lo tanto, las operaciones de adición y multiplicación por un escalar se conservan bajo la transformación. Esta estructura que determina las ideas de una transformación lineal se ilustran en la figura 1.15.

Figura 1.15

Ejemplo 1

Demuestre que la transformación $\boldsymbol{T}: \mathbf{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{2}}$ es lineal, donde $T(x,y) = (x-y, 3x)$.

Solución

Primero se demostrara que $\boldsymbol{T}$ conserva la adición. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) elementos de $\mathbf{R}^{\mathbf{2}}$. De esta manera,

$T\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) = T(x_1+x_2, y_1+y_2)$ Por la adición vectorial

$= (x_1+x_2-y_1-y_2, 3x_1+3x_2)$ Por la definición de $\boldsymbol{T}$

$= (x_1-y_1, 3x_1) + (x_2-y_2, 3x_2)$ Por la adicion vectorial

$= T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)$ Por la definición de $\boldsymbol{T}$

Así, $\boldsymbol{T}$ conserva la adición vectorial.

Ahora se demostrara que $\boldsymbol{T}$ conserva la multiplicación por un escalar. Sea c un escalar.

$T\big(c(x_1,y_1)\big) = T(cx_1, cy_1)$ Debido a la multiplicación de un vector por un escalar

$= T(cx_1 - cy_1, 3cx_1)$ Por la definición de $\boldsymbol{T}$

$= c(x_1 - y_1, 3x_1)$ Debido a la multiplicación de un vector por un escalar

$= c\,T(x_1, y_1)$ Por la definición de $\boldsymbol{T}$

Así, $\boldsymbol{T}$ conserva la multiplicación por un escalar. Por lo tanto, $\boldsymbol{T}$ es una trasformación lineal.

Una transformación lineal de un espacio vectorial en si mismo recibe el nombre de **operador lineal**.
$\boldsymbol{T}: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$, definida por $T(x, y) = (x - y, 3x)$, es un ejemplo de operador lineal.

El ejemplo siguiente ilustra una transformación que no es lineal.

Ejemplo 2

Demuestre que la transformación $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ no es lineal, donde $T(x, y, z) = (xy, z)$.

Solución

Haciendo primero la prueba de la adición. Sean (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) elementos de $\mathbf{R^3}$. Entonces

$$\begin{aligned} T\big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2), z_1 + z_2) \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) &= (x_1y_1, z_1) + (x_2y_2, z_2) \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

Se tiene que, $T\big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big) \neq T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$.

Ya que la adición vectorial no se conserva, entonces $\boldsymbol{T}$ no es lineal.

Ahora se mostrara que toda matriz define una transformación que, además, es lineal. Por ejemplo, considere la matriz de 2× 3 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ y el vector columna $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ de $\mathbf{R^3}$. Esta matriz define la transformación $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ de $\mathbf{R^3}$ a $\mathbf{R^2}$, usando la multiplicación de matrices de la manera siguiente:

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y - 2z \\ 4y + z \end{bmatrix}$$

Las imágenes de los vectores se pueden determinar utilizando valores adecuados de $x, y,$ y z. Por ejemplo, se tiene que

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\11\end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad T\left(\begin{bmatrix}-2\\4\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}8\\17\end{bmatrix}$$

Teorema

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de $m \times n$. Sea $\boldsymbol{x}$ un elemento de $\boldsymbol{R^n}$, interpretado como una matriz columna. La transformación $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$, definida por $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$, es lineal. En dicha transformación lineal $\boldsymbol{A}$ recibe el nombre de **matriz de transformación**.

Demostración

Puesto que $\boldsymbol{A}$ es una matriz de $m \times n$ y $\boldsymbol{x}$ es una matriz de $n \times 1$, entonces $\boldsymbol{Ax}$ es una matriz de $m \times 1$. Así, $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$ define una transformación de $\mathbf{R^n}$ a $\mathbf{R^m}$. Falta demostrar que $\boldsymbol{T}$ es lineal. Sean $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ elementos de $\boldsymbol{R^n}$**,** expresados como matrices columna, y sea c un escalar. De la definición de $\boldsymbol{T}$ y por las propiedades de las matrices, se tiene que

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Ay}, \text{ la adición se conserva}$$

$$\boldsymbol{T}(c\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{Ax}) = c\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}), \text{ la multiplicación por un escalar se conserva}$$

Por lo tanto, la transformación es lineal.

Ejemplo 3

Considere la transformación ***T*** definida por la matriz $\boldsymbol{A}$ de 3×2 siguiente. Determine la imagen de un vector cualquiera bajo ***T*** , y utilice este resultado para determinar la imagen del vector dado $\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$$

Solución

Puesto que $\boldsymbol{A}$ es una matriz de 3×2, esta define la transformación lineal $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$. Así, se tiene que

$$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x-y\\2y\\x+3y\end{bmatrix}$$

Si $x = 5$ y $y = -1$, se obtiene

$$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\-2\\2\end{bmatrix}$$

Véase la figura 1.16.

Figura 1.16

Ejemplo 4

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de 3×2 y $\boldsymbol{B}$ una matriz de 4×6. Determine los dominios y codominios de las transformaciones lineales definidas por $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

Solución

Sea $\boldsymbol{x}$ un vector en el dominio de la transformación definida por $\boldsymbol{A}$. De esta manera, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$. $\boldsymbol{A}$ es una matriz de 3×2. $\boldsymbol{x}$ debe ser una matriz de 2×1 o un vector en $\mathbf{R}^2$ para que el producto $\boldsymbol{Ax}$ exista. La imagen $\boldsymbol{Ax}$ será una matriz 3×1 o un vector en $\mathbf{R}^3$. Así, el dominio de la transformación es $\mathbf{R}^2$ y el codominio es $\mathbf{R}^3$. Mediante argumentos similares se concluye que el dominio de la transformación definida por la matriz $\boldsymbol{B}$ de 4×6 es $\mathbf{R}^6$ y el codominio es $\mathbf{R}^4$.

Composición de las transformaciones matriciales

Quizá el alumno se encuentre familiarizado con el concepto de combinación de funciones en funciones compuestas. También las transformaciones matriciales se pueden combinar. Sean $\boldsymbol{T_1}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$ y $\boldsymbol{T_2}: \mathbf{R^m} \to \mathbf{R^s}$ transformaciones matriciales definidas por $\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A_1x}$ y $\boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A_2y}$. Estas transformaciones se pueden combinar de forma natural para obtener una sola transformación $\boldsymbol{T}$ de $\mathbf{R^n} \to \mathbf{R^s}$. Esta transfromacion compuesta $\boldsymbol{T}$ es la transformación que consiste en la transformación $\boldsymbol{T_1}$ seguida de la transformación $\boldsymbol{T_2}$. Véase la figura 1.17. $\boldsymbol{T}$ se define como $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{x}))$. La notación $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_2} \circ \boldsymbol{T_1}$ representa la composición de dos transformaciones. Ahora se vera que la transformación compuesta $\boldsymbol{T}$ es una transformación matricial definida por el producto de las matrices $\boldsymbol{A_2}$ y $\boldsymbol{A_1}$.

Figura 1.17

Teorema

La transformación compuesta $\boldsymbol{T}$ de las dos transformaciones matriciales $\boldsymbol{T_1}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$ y $\boldsymbol{T_2}: \mathbf{R^m} \to \mathbf{R^s}$, definidas por las matrices $\boldsymbol{A_1}$ y $\boldsymbol{A_2}$ respectivamente, es una transformación matricial $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^s}$, definida por el producto matricial $\boldsymbol{A_2 A_1}$.

Demostración

De acuerdo con la definición de $\boldsymbol{T}$, se tiene que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T_2}\big(\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{T_2}\big(\boldsymbol{A_1}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{A_2}\big(\boldsymbol{A_1}(\boldsymbol{x})\big)$. Ya que la multiplicación de matrices es asociativa, la expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera: $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A_2 A_1})\boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{A_2}$ es una matriz de $s \times m$, y $\boldsymbol{A_1}$ es una matriz de $m \times n$. La matriz resultante del producto $\boldsymbol{A_2 A_1}$ es una matriz de $s \times n$. Por lo tanto, $\boldsymbol{T}$ es una transformación de $\mathbf{R^n}$ a $\mathbf{R^s}$, definida por el producto matricial $\boldsymbol{A_2 A_1}$.

Ejemplo 5

Sean $\boldsymbol{T_1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A_1 x}$ y $\boldsymbol{T_2}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A_2 x}$, definidas por las matrices $\boldsymbol{A_1}$ y $\boldsymbol{A_2}$ siguientes. Sea, además, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_2} \circ \boldsymbol{T_1}$. Determine la imagen del vector $\boldsymbol{x}$ bajo $\boldsymbol{T}$.

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución

$\boldsymbol{T}$ se encuentra definida por el producto matricial $\boldsymbol{A_2 A_1}$. Se tiene que

$$\boldsymbol{A_2 A_1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 12 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 12 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Se pueden generalizar estos resultados de manera natural. Sean $\boldsymbol{T_1}, \dots, \boldsymbol{T_n}$ una sucesión de transformaciones lineales en $\mathbf{R^n}, \dots, \mathbf{R^s}$, definidas por las matrices $\boldsymbol{A_1}, \dots, \boldsymbol{A_n}$. La composición $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_n} \circ \dots \circ \boldsymbol{T_1}$, esta determinada por el producto de matrices $\boldsymbol{A_n} \cdots \boldsymbol{A_1}$ (si el producto existe).

1.4 Transformaciones Matriciales

En la sección anterior se vio que una matriz define una transformación lineal. En esta sección se vera que cualquier transformación lineal $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$ puede quedar definida por una matriz $\boldsymbol{A}$. Dicha representación matricial de una transformación lineal es una herramienta importante para el análisis de las transformaciones lineales. Se determinaran las matrices que describen una gran cantidad de transformaciones lineales importantes, como las rotaciones y las expansiones.

Rotación con respecto al origen

Considere una rotación $\boldsymbol{T}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ con respecto al origen. Véase la figura 1.18(a). Sea $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^{'}$ y $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^{'}$ El paralelogramo (1) se transforma en el paralelogramo (2). Puesto que la diagonal del paralelogramo (1) se transforma en la diagonal del paralelogramo (2), $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^{'} + \boldsymbol{v}^{'} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$, la adición se conserva

Figura 1.18

Además, en la figura 1.18(b), $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^{'}$. Puesto que la imagen del vector $c\boldsymbol{w}$ es $c\boldsymbol{w}^{'}$, $\boldsymbol{T}(c\boldsymbol{w}) = c\boldsymbol{w}^{'} = c\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{w})$, la multiplicación por un escalar se conserva.

Por lo tanto, una rotación con respecto al origen es un operador lineal.

Una vez que se ha visto que una rotación constituye un operador lineal, formulemos ahora una expresión funcional para dicha rotación, una expresión que proporcione las coordenadas de la imagen de cualquier punto bajo una rotación. Considere una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj en un ángulo θ con respecto al origen. Véase la figura 1.18(c). Dicha rotación transformara el punto A en el punto B. La distancia *OA* es igual a *OB*; denote esta distancia con r. Sea $\propto$ el ángulo *AOC*. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
x^{'} = OC = r cos(\propto + \theta) &= r\ cos\alpha\ cos\theta - \ r\ sen\alpha\ sen\theta \\
&= x\ cos\theta - y\ sen\theta \\
y^{'} = BC = r sen(\propto + \theta) &= r\ sen\alpha\ cos\theta + \ r\ cos\alpha\ sen\theta \\
&= y\ cos\theta + x\ sen\theta \\
&= x\ sen\theta + y\ cos\theta
\end{aligned}
$$

Estas expresiones para $x^{'}$ y $y^{'}$ se pueden reducir a una sola ecuación matricial.

$$
\begin{bmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

Por consiguiente,

$$
T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

Una rotación con respecto al origen se encuentra definida por una multiplicación entre matrices, lo cual confirma que una rotación es, también, un operador lineal. Observe que θ es positivo en una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj, y negativo si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj.

Por ejemplo, para determinar la imagen del punto $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ bajo una rotación de $\pi/2$ radianes con respecto al origen. Usando $\cos(\pi/2) = 0$ y $sen(\pi/2) = 1$ en la matriz de rotación, se obtiene

$$T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

La imagen del punto $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ bajo una rotación de $\pi/2$ radianes con respecto al origen es $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$.

En el caso de una rotación, cada transformación lineal puede definirse por una matriz. Aun cuando es posible emplear formas adecuadas para obtener representaciones matriciales de transformaciones lineales, como la matriz de rotación, es deseable tener un método general que se pueda aplicar a todos los casos. En seguida se desarrollara dicho método para las transformaciones lineales en $\boldsymbol{R^n}$.

Representación Matricial

Sea $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$ una transformación lineal. En este estudio se expresan los vectores como vectores columna. Definiendo los vectores $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ de $\boldsymbol{R^n}$ de la manera siguiente manera. Sea $\boldsymbol{u}$ un vector cualquiera en $\boldsymbol{R^n}$.

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix}1\\\vdots\\0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{e_n} = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

Los vectores $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ se dice que son la **base canónica** de $\boldsymbol{R^n}$. Estos vectores desempeñan un papel importante en este análisis de $\boldsymbol{R^n}$ en virtud de que cualquier vector, como $\boldsymbol{u}$, puede expresarse en términos de dichos vectores de la siguiente manera: $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e_n}$.

Ya que $\boldsymbol{T}$ es una transformación lineal, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{T}(a_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e_n}) = a_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_1}) + \cdots + a_n\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_n})$

$$= [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_1}) \dots \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_n})]\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

En la expresión anterior, $[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_1}) \dots \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_n})]$ es una matriz con las columnas $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_1}), \dots, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_n})$**.**

Entonces, la transformación lineal $\boldsymbol{T}$ se encuentra definida por la matriz $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_1}) \dots \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_n})]$**.** $\boldsymbol{A}$ recibe el nombre de la **matriz canónica** de $\boldsymbol{T}$.

Observe que los vectores de $\boldsymbol{R^n}$ deben expresarse en forma de columnas con el objeto de poder utilizar la forma de representación matricial de una transformación lineal.

Ejemplo 1

Determine la matriz canónica de $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x + y\\3y\end{bmatrix}$**.**

Solución

Determine el efecto que tiene $\boldsymbol{T}$ sobre la base canónica.

$$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}.$$

Estas matrices son las columnas de la matriz canónica $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{T}$ se puede expresar como una transformación matricial: $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

Se determinaran ahora las matrices que describen transformaciones importantes.

Dilatación y contracción

Considere el operador $\boldsymbol{T}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definido por $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\boldsymbol{r}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, donde $\boldsymbol{r}$ es un escalar. Si $\boldsymbol{r}>1$, entonces $\boldsymbol{T}$ *aleja* a los puntos del origen; esta operación recibe el nombre de dilatación de factor $\boldsymbol{r}$. Si 0< $\boldsymbol{r}<1$, entonces $\boldsymbol{T}$ *acerca* los puntos al origen; esta operación recibe el nombre de **contracción de factor $\boldsymbol{r}$**. Véase la figura 1.19. Se puede mostrar fácilmente que $\boldsymbol{T}$ es una transformación lineal.

Figura 1.19

Determine la matriz canónica de $\boldsymbol{T}$. Determine el efecto que tiene $\boldsymbol{T}$ en la base canónica.

$$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}r\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\r\end{bmatrix}.$$

La matriz canónica es:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}r & 0\\0 & r\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{T}$ se puede expresar como una transformación matricial: $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}r & 0\\0 & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

Por ejemplo, considere la dilatación $\boldsymbol{T}$ definida por la matriz $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$. Se tiene que,

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $\boldsymbol{T}$ transforma en punto $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ en el punto $\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$. La imagen se localiza en la misma dirección que el punto original a partir del origen, pero se encuentra tres veces más lejos del origen.

Reflexión

Considere el operador $\boldsymbol{T}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definido por $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{r}\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$, que transforma un punto en su imagen especular en el eje *x*. Véase la figura 1.19 (b). T recibe el nombre de **reflexión**. Primero se puede mostrar fácilmente que $\boldsymbol{T}$ es lineal; determine ahora su matriz canónica. Luego el efecto de $\boldsymbol{T}$ en la base canónica es:

$$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}.$$

La matriz canónica de $\boldsymbol{T}$ es,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, una reflexión con respecto al eje *x* se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$$

A menudo, las aplicaciones implican una sucesión de transformaciones lineales. Una sola transformación compuesta $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_n} \circ \cdots \circ \boldsymbol{T_1}$ se encuentra descrita por el producto matricial de las transformaciones de los componentes, $\boldsymbol{A_n} \cdots \boldsymbol{A_1}$.

Ejemplo 2

Determine la matriz que describe una reflexión en el eje *x*, seguida de una rotación de $\pi/2$, seguida a su vez por una dilatación de factor 3. Encuentre la imagen del punto $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ bajo esta sucesión de transformaciones.

Solución

Las matrices que definen la reflexión, la rotación y la dilatación son, respectivamente,

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}cos(\pi/2) & -sen(\pi/2)\\sen(\pi/2) & cos(\pi/2)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$$

Así, el siguiente producto matricial define la transformación compuesta:

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos(\pi/2) & -sen(\pi/2)\\sen(\pi/2) & cos(\pi/2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 0\end{bmatrix}$$

La imagen del punto $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\12\end{bmatrix}$.

Transformaciones definidas por matrices no singulares

Una transformación no singular es una transformación $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$, definida por $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz no singular.

Las transformaciones no singulares son importantes debido a que *conservan la linealidad* de un espacio vectorial en el siguiente sentido.

Teorema

Una transformación lineal no singular $\boldsymbol{T}$ transforma:

a) rectas en rectas.
b) segmentos de recta en segmentos de recta.
c) rectas paralelas en rectas paralelas.
d) rectas que pasan por el origen, en rectas que pasan por el origen.

Ejemplo 3

Considere el operador $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$, definido por la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Determine la imagen del cuadrado unitario bajo esta transformación.

Solución

El cuadrado unitario en $\mathbf{R^2}$ es el cuadrado cuyos vértices son, respectivamente, los puntos:

$$\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{O}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figura 1.20

Véase la figura 1.20(a). Calcule las imágenes de estos puntos bajo la transformación matricial. Resulta conveniente utilizar la notación $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ para analizar las imágenes de puntos específicos. Si multiplica cada punto por la matriz, se obtiene

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{P}' & \boldsymbol{Q} \quad \boldsymbol{Q}' & \boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{R}' & \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{O}' \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Además, $|\boldsymbol{A}| = (4 \times 3) - (2 \times 2) = 8 \neq 0.$ La matriz $\boldsymbol{A}$ es no singular; por lo que, el segmento de recta se transforma en segmentos de recta. Así, se tiene que $\boldsymbol{OP} \to \boldsymbol{OP}'$ $\quad \boldsymbol{PQ} \to \boldsymbol{PQ}'$ $\quad \boldsymbol{QR} \to \boldsymbol{QR}'$ $\quad \boldsymbol{OR} \to \boldsymbol{OR}'$

El cuadrado $\boldsymbol{PQRO}$ se transforma en el paralelogramo $\boldsymbol{P'Q'R'O}$. Véase la figura 4.20(b).

Estos operadores en $\mathbf{R^2}$ se utilizan en los programas de computadora para girar, alargar o contraer figuras. Más tarde se analizara esta aplicación.

Los cuerpos sólidos se pueden describir de manera geométrica. Cuando se coloca una carga sobre un cuerpo, la forma de este cambia y ocurre un fenómeno llamado **deformación**. Por ejemplo, el cuadrado $\boldsymbol{PQRO}$ de la figura 1.21 podría representar un cuerpo deformado, que adquiere la forma $\boldsymbol{P'Q'R'O'}$. Dichas deformaciones se pueden modelar y analizar en computadora con la ayuda de estas técnicas matemáticas. La **elasticidad** y la **plasticidad** son las áreas de la ciencia encargadas del estudio de dichos problemas.

Las transformaciones no singulares también son importantes en virtud de que poseen una transformación inversa. Sea $\boldsymbol{T}$ una transformación no singular, definida por una matriz $\boldsymbol{A}$, y sea $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{v}$. Define, por lo tanto, una transformación, denominada la inversa de $\boldsymbol{T}$, que se denota $\boldsymbol{T}^{-1}$.

Las rotaciones, dilataciones y reflexiones son transformaciones no singulares. Por lo que, tienen inversas. Se demostrara que la inversa de una dilatación de factor $\boldsymbol{r}$ es una contracción de factor $1/\boldsymbol{r}$. La matriz de dilatación $\boldsymbol{A}$ y su inversa son: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{r} \end{bmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/\boldsymbol{r} & 0 \\ 0 & 1/\boldsymbol{r} \end{bmatrix}$

Por lo tanto, $\boldsymbol{A^{-1}}$ define una transformación de factor $1/\boldsymbol{r}$.

Translaciones y transformaciones afines

Concluye esta sección con un análisis de las transformaciones que, aunque no son lineales, son importantes en las matemáticas y las aplicaciones.

Una **translación** es una transformación $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$, definida por $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ donde $\boldsymbol{v}$ es un vector fijo. Una translación desplaza puntos en una dirección y a una distancia definidas por el vector $\boldsymbol{v}$. Por consiguiente, las *translaciones conservan rectas, ángulos y distancias*, con gran naturalidad. Por ejemplo, considere la siguiente translación en $\mathbf{R^2}$.

$$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determine el efecto de $\boldsymbol{T}$ sobre el triangulo $\boldsymbol{PQR}$, cuyos vértices son $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vea que

$$\boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{P'} \qquad \boldsymbol{Q} \qquad \boldsymbol{Q'} \qquad \boldsymbol{R} \qquad \boldsymbol{R'}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$$

El triangulo $\boldsymbol{PQR}$ se transforma en el triangulo $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{R}'$ de la figura 1.21.

Figura 1.21

Ejemplo 4

Determine la ecuación de la imagen de la recta $y = 2x + 3$ bajo la translación $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

Solución

La ecuación $y = 2x + 3$ describe puntos sobre la recta con pendiente 2 y ordenada al origen $y = 3$. $\boldsymbol{T}$ Desplazara esta recta convirtiéndola en otra recta. Se quiere determinar la ecuación de esta imagen recta.

Se tiene que $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\2x+3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+2\\2x+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$

Vea que $y' = 2x'$ para el punto imagen. Por lo tanto, la ecuación de la imagen recta es $y = 2x$.

Una transformación afin es una transformación $\boldsymbol{T}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$, definida por $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz $\boldsymbol{v}$ es un vector fijo.

Una transformación afin puede interpretarse como una transformación matricial seguida por una translación. Por ejemplo, considere la siguiente transformación afin en $\mathbf{R^2}$.

$$\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Al determinar la imagen del cuadrado unitario de la figura 1.22. Se tiene que,

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{P} \quad \boldsymbol{P}' & \boldsymbol{Q} \quad \boldsymbol{Q}' & \boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{R}' & \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{O}' \\ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} \end{array}$$

En virtud de que la matriz es no singular, los segmentos de recta se transforman en segmentos de recta. Asi, se tiene que $\boldsymbol{OP} \to \boldsymbol{O}'\boldsymbol{P}'$ $\quad \boldsymbol{PQ} \to \boldsymbol{P}'\boldsymbol{Q}'$ $\quad \boldsymbol{QR} \to \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{R}'$ $\quad \boldsymbol{OR} \to \boldsymbol{O}'\boldsymbol{R}'$

El cuadrado $\boldsymbol{PQOR}$ se transforma en el paralelogramo $\boldsymbol{P}^{'}\boldsymbol{Q}^{'}\boldsymbol{R}^{'}O'$.

Figura 1.22