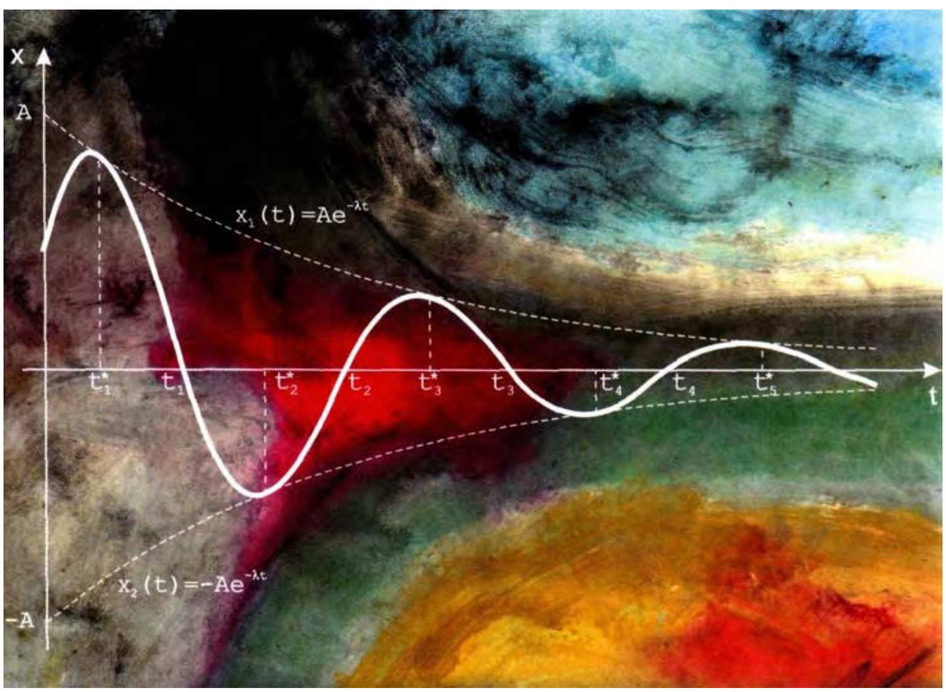
ECUACIONES DIFERENCIALES
TÉCNICAS DE SOLUCIÓN Y APLICACIONES

JOSÉ VENTURA BECERRIL ESPINOSA
DAVID ELIZARRARAZ MARTÍNEZ



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

José Ventura Becerril Espinosa

Cursó la Licenciatura en Física y Matemáticas en la ESFM del IPN, titulándose en 1985. Obtuvo el grado de Maestro en Ciencias en la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV en 1987 con la tesis "Algunos resultados clásicos de la integración de funciones elementales" Ingresó de forma definitiva a la Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco en 1985, en el Departamento de Ciencias Básicas. Desde entonces ha publicado materiales diversos para la docencia, así como reportes de investigación que se han presentado en congresos nacionales tanto de Matemáticas, como de investigación educativa.

Actualmente es miembro del Grupo de Investigación de Matemática Educativa, donde trabaja en la aplicación de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas.

ECUACIONES DIFERENCIALES

TÉCNICAS DE SOLUCIÓN Y APLICACIONES

Libros de texto y manuales de práctica

COLECCIÓN / LIBROS DE TEXTO Y MANUALES DE PRÁCTICA
SERIE / MATERIAL DE APOYO A LA DOCENCIA

30 AÑOS
transformando el diálogo por la razón
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ECUACIONES DIFERENCIALES
TÉCNICAS DE SOLUCIÓN Y APLICACIONES

José Ventura Becerril Espinosa
David Elizarraraz Martínez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

ECUACIONES DIFERENCIALES. TÉCNICAS DE SOLUCIÓN Y APLICACIONES
Primera edición, 2004

Diseño y producción editorial•nopase. Eugenia Herrera/Israel Ayala
Ilustración de portada. ©Israel Ayala.
Fotografía de autores. ©Roberto Cano

ISBN 970-31-0230-1
Impreso en México/*Printed in Mexico*

Prólogo

Este libro está diseñado para un **curso trimestral** de ecuaciones diferenciales ordinarias. Presentamos los teoremas y técnicas de solución que consideramos básicos en un estudio introductorio de ésta importante disciplina de las Matemáticas. Aunque no hemos puesto énfasis en las demostraciones, proporcionamos una buena cantidad de ejercicios resueltos, de modo que un estudiante de Ingeniería podría obtener, mediante su análisis, un nivel satisfactorio en los diferentes métodos de solución de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones elementales más comunes. Para el curso sugerimos seguir el orden previsto, no obstante, si algún lector considera que es demasiado material se pueden omitir las secciones 2.8, 2.9 y 2.10.

Los diferentes temas se exponen en forma clara y sencilla para su inmediata comprensión. En las primeras secciones los desarrollos se hacen de manera exhaustiva. Más adelante, lo que ya es conocido no se desarrolla completamente, sino que se dejan al lector los detalles que en ese momento ya está en capacidad de realizar. En consecuencia, el texto se puede utilizar para un curso tradicional o bien, para un curso en el Sistema de Aprendizaje Individualizado, en el que el alumno estudia por su propia cuenta.

En el capítulo uno ilustramos la aplicación de las ecuaciones diferenciales. Más que la solución y el entendimiento de los problemas planteados, buscamos motivar el interés en estudiar ecuaciones diferenciales, a través de problemas actuales como son el crecimiento de poblaciones, el impacto de la publicidad y las curvas de persecución, entre otros.

El capítulo 2 está dedicado a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Se analizan, uno por uno, varios de los métodos más usuales e incluimos la sección 2.7 en la que se aborda el problema de resolver una ecuación dada empleando el método más conveniente. En esta sección se proponen 80 ejercicios, debido a que usualmente los libros de texto estudian la solución de ecuaciones diferenciales por tema y el alumno sabe que las ecuaciones que se le plantean son del tema estudiado; pero en la práctica y en sus cursos posteriores las ecuaciones con que se encuentra las tiene que resolver sin conocer de antemano de que tipo son.

El capítulo 3 muestra la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, entre las cuales están las más accesibles para los estudiantes, ya que se espera que ellos sean capaces de entenderlas y resolver problemas relacionados con éstas.

En el capítulo 4 nos concentramos en resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden dos. Pensamos que no nes difícil entender los resultados para orden mayor que dos y aplicarlos a casos sencillos de ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes, razón por la cual aparece la sección 4.5.

Finalmente, el capítulo cinco contiene diversas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Proponemos sólo como ejercicios los correspondientes al movimiento vibratorio de una masa sujeta a un resorte y de circuitos eléctricos, para no caer en un exceso de material, aunque en el capítulo aparecen otras aplicaciones.

Queremos destacar que en las páginas 220 a la 243 se encuentran las respuestas de *todos* los ejercicios propuestos, lo cual será de gran ayuda para que el estudiante compruebe sus conocimientos.

El libro incorpora el producto del trabajo realizado por los autores al impartir en varias ocasiones el curso de *ecuaciones diferenciales ordinarias* en la UAM-A. También agradecemos a la M. en M. Marina Salazar Antúnez y al M. en C. José Luis Huerta Flores por sus valiosos comentarios y problemas aportados.

Al final, presentamos algunas referencias bibliográficas que esperamos sean útiles para los lectores interesados en profundizar en el estudio de algún tema o de conocer otras aplicaciones.

Capítulo 1

Introducción

"El lenguaje para entender a la naturaleza es la matemática."
Galileo Galilei.

1.1 Ecuaciones Diferenciales y Modelos Matemáticos

Una gran cantidad de leyes en la Física, Química y Biología tienen su expresión natural en ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. También, es enorme el mundo de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en Ingeniería, Economía, Ciencias Sociales, Astronomía y en las mismas Matemáticas. La causa es simple, si un fenómeno se puede expresar mediante una o varias razones de cambio entre las variables implicadas entonces correspondientemente tenemos una o varias ecuaciones ecuaciones diferenciales.

El ejemplo más simple de una ecuación diferencial proviene de la segunda ley de Newton $F = ma$, ya que si un cuerpo cae bajo la influencia de la fuerza de gravedad entonces

$$ma = mg,$$

y como $a = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, donde $y(t)$ denota la posición del cuerpo al tiempo t, tenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g,$$

que es una ecuación diferencial ordinaria, cuya solución es la función de posición $y(t)$.

Si además suponemos que sobre el cuerpo actúa una fuerza de fricción con el medio que lo rodea, cuya magnitud es proporcional a la velocidad instantánea dy/dt, se sigue que

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt},$$

de donde

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dy}{dt} = g.$$

Otros ejemplos son las famosas ecuaciones en derivadas parciales del calor, de onda y de Laplace, que tienen la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0,
\end{aligned}$$

respectivamente, que han sido fuente inagotable de diversos trabajos de investigación.

En nuestro caso nos restringiremos al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias. A continuación presentaremos algunos problemas que motivan el interés en el estudio de estas ecuaciones.

EJEMPLO 1. ¿ Se puede predecir la población de un país?

La siguiente tabla muestra el número de millones de habitantes que había en toda la República Mexicana, de acuerdo al censo del año que se indica.

Año	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
Población (millones de hab.)	13.61	15.16	14.33	16.53	19.65	25.78	34.92

Con base en los datos de la tabla y ubicándonos en el año de 1960, ¿se podría haber hecho una estimación para la población de los años 1970 y 1980 ?

Solución. Una suposición razonable es que la rapidez de variación de la población con respecto al tiempo es proporcional a la población, es decir si $P(t)$ denota la población al tiempo t entonces

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P,$$

donde α es una constante positiva.

Así, para conocer la población en cualquier tiempo hay que resolver la **ecuación** anterior. La **solución** es $P(t) = ce^{\alpha t}$, con c una constante arbitraria. Para determinar c tenemos la **condición inicial** que en $t = 0$ (correspondiendo al año de 1950) la población es 25.78, de donde $P(t) = 25.78e^{\alpha t}$.

Para encontrar la constante de proporcionalidad podemos usar que $P(10) = 34.92$. En consecuencia

$$P(t) = 25.78e^{0.0303461t}$$

Ahora para 1970 la población aproximada sería $P(20)$, que dá por resultado

$$P(20) = 47.30.$$

La población para 1980 se estimará en $P(30) = 64.07$.

Es interesante comparar los valores calculados con los que se reportaron en los censos respectivos. Los censos realizados mostraron que la población en 1970 y 1980 fue de 48.22 y 67.41 millones de habitantes, respectivamente.

Con base en los dos últimos datos ¿qué población se esperará para los años 2000 y 2010?

EJEMPLO 2. ¿Es posible medir el impacto de la publicidad?

Cierta compañía produce un artículo destinado a una población en la que hay un número M de potenciales compradores. La compañía decide establecer una campaña de publicidad para promocionar su producto. Los propietarios de la compañía han solicitado a su departamento de publicidad una medida del impacto de la publicidad. ¿Se puede ayudar a los publicistas?

Solución. Hay varias maneras de medir el impacto de la publicidad, una es la siguiente. Sea $y(t)$ el número de personas que conocen el producto al tiempo t. Supongamos que la velocidad con que varía el número de personas que conocen el producto es proporcional tanto al número de personas que conocen el producto, como al de las que todavía no lo conocen. Entonces

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y), \tag{1.1}$$

donde k es una constante positiva. En la sección 3.3.3, ejemplo 2, se muestra como resolver (1.1). Su solución es la función

$$y(t) = \frac{M}{1 + ce^{-kMt}}, \tag{1.2}$$

con c una constante.

En la literatura económica a la ecuación (1.2) se le conoce como *ecuación de la curva logística*, la cual nos da una medida del número de personas que conocen el producto al tiempo t. La forma general de su gráfica se muestra en la figura 1.1.

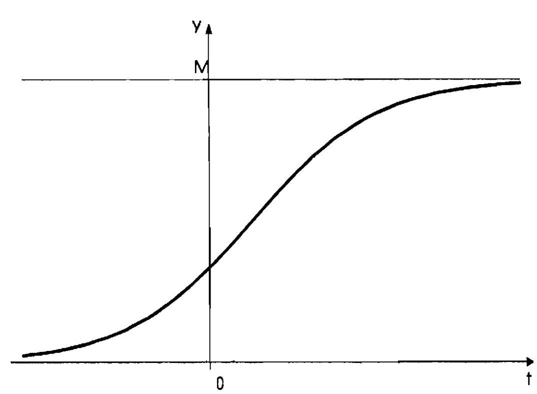


Figura 1.1: Curva Logística

EJEMPLO 3. Espejos Parabólicos.

Supóngase que señales luminosas (o de algún otro tipo) viajan en el plano xy y paralelamente al eje y, chocando con la curva cuya ecuación es $y = f(x)$ y reflejándose de tal manera que todas ellas concurren en el punto $F(0, p)$ con p una constante positiva. Véase la figura 1.2. Comprobar que la curva $y = f(x)$ es una parábola y que además en caso de que pase por $(0, 0)$ su ecuación es $4py = x^2$.

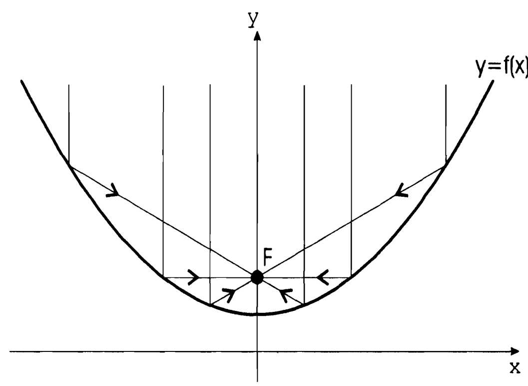


Figura 1.2: Señales luminosas

Solución. Escribiremos primeramente el problema en lenguaje matemático. Para un punto cualquiera $P(x, y)$ en la curva $y = f(x)$, la derivada es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto, es decir

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta. \tag{1.3}$$

En la figura 1.3 se puede ver la configuración de la curva $y = f(x)$, la recta tangente l_t en el punto $P(x, y)$, el punto $F(0, p)$ y los ángulos α y θ. Esta configuración se obtuvo de los principios básicos de la Geometría Euclideana y del hecho físico de que la magnitud del ángulo de incidencia es igual a la magnitud del ángulo reflejado. Del triángulo rectángulo $\triangle PQS$ se obtiene la igualdad

$$\tan\theta = \frac{PS}{QS} = \frac{1}{\frac{QS}{PS}} = \frac{1}{\tan\alpha} \tag{1.4}$$

y del triángulo rectángulo $\triangle PFV$ la igualdad

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{y - p}{x}. \tag{1.5}$$

Recordando la identidad

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha} \tag{1.6}$$

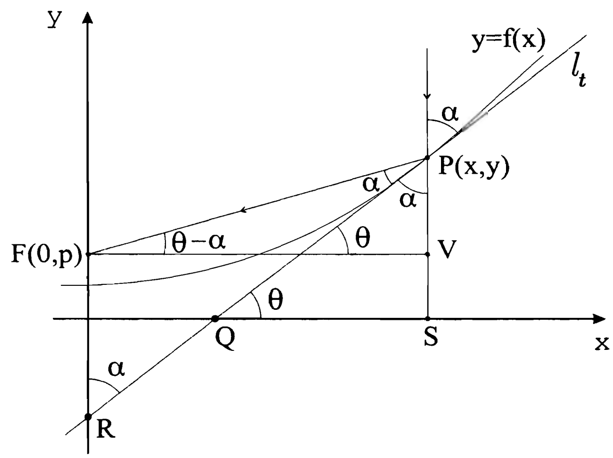


Figura 1.3: Espejo parabólico

y sustituyendo en ésta (1.3),(1.4) y (1.5) obtenemos finalmente la ecuación

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(y-p)\frac{dy}{dx} - x = 0. \tag{1.7}$$

La ecuación (1.7) se resuelve en el ejemplo 7 de la sección 2.2. Su solución es

$$y = \frac{A^2x^2 + 2Ap - 1}{2A}, \tag{1.8}$$

donde A es una constante. Nótese que (1.8) es en efecto la ecuación de una parábola. Si sabemos que la curva $y = f(x)$ pasa por el punto $(0,0)$ es decir $y = 0$ cuando $x = 0$, de acuerdo con (1.8) se sigue que,

$$0 = 2Ap - 1,$$

de donde

$$A = \frac{1}{2p}.$$

Al sustituir el valor de A en (1.8) nos lleva a

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

o bien

$$4py = x^2,$$

como se afirma en el enunciado.

EJEMPLO 4. Curvas de persecución 1.

En medio de una gran bruma, un destructor y un submarino de dos naciones distintas, se descubren estando a 4 km de distancia. Inmediatamente el submarino se sumerge y avanza en una dirección fija a toda velocidad. ¿Qué trayectoria debe seguir el destructor para asegurarse de que estará exactamente encima del submarino si tiene una velocidad igual a tres veces la del submarino?

Solución. Utilizaremos coordenadas polares para la trayectoria que debe seguir el submarino. Para estas coordenadas se cumple que el diferencial de arco es

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta.$$

El destructor avanzará a toda velocidad 3 kilómetros en dirección al punto donde localizó al submarino, a partir de ahí denotemos por $r = f(\theta)$ la trayectoria que debe seguir el destructor. Ver figura 1.4

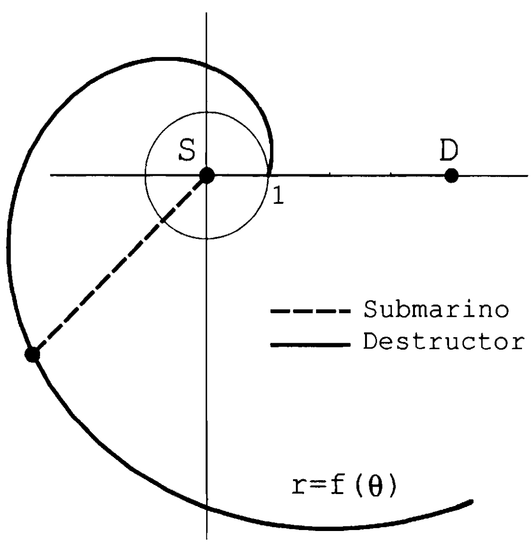


Figura 1.4: Trayectorias del submarino y del destructor

La distancia d_S que recorre el submarino hasta el punto donde las trayectorias se cortan es

$$d_S = r - 1,$$

y la distancia d_D que recorre el destructor hasta la intersección es

$$d_D = 3(r - 1),$$

por ser su velocidad el triple de la del destructor.

Luego, tenemos que

$$d_D = 3(r-1) = \int_0^\theta ds = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta,$$

o sea que

$$3(r-1) = \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta.$$

Derivando con respecto a θ ambos lados de la igualdad anterior resulta

$$\begin{aligned} 3\frac{dr}{d\theta} &= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} \\ 9\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \\ 8\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\sqrt{8}\frac{dr}{d\theta} = r.$$

Así, para conocer qué trayectoria debe seguir el destructor debemos resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{8}}, \tag{1.9}$$

es decir, hay que encontrar una función $r(\theta)$ cuya derivada sea $\frac{1}{\sqrt{8}}r(\theta)$.

Una función que satisface la ecuación (1.9) es

$$r(\theta) = e^{\theta/\sqrt{8}},$$

como puede comprobarse inmediatamente, por sustitución directa de dicha función y su derivada con respecto a θ en (1.9).

De todo lo anterior podemos concluir que si el destructor sigue la trayectoria $r = e^{\theta/\sqrt{8}}$ después de haber avanzado 3 kilómetros en línea recta en dirección a donde localizó al submarino, puede estar seguro de que pasará por encima del submarino sin importar que dirección elija este último.

Finalmente, es claro que no es la única trayectoria que puede seguir el destructor y a los que viajan en el submarino habría que recomendarles que no avancen en una sola dirección.

EJEMPLO 5. Curvas de persecución 2.

Dos equipos de futbol americano se encuentran en juego. En un momento determinado un jugador q recibe el balón y corre en línea recta a la portería contraria con una velocidad v_q. En ese mismo instante otro jugador p (perseguidor) corre con velocidad v_p en dirección de q para tratar de interceptarlo, (ver figura 1.5). Nos interesa saber bajo que condiciones p alcanza a q, es decir, si por ejemplo $v_p > v_q$, ¿p alcanzará a q?

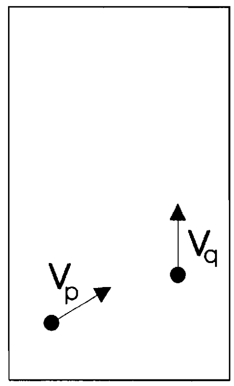


Figura 1.5: El jugador p persigue al q

Solución. Como el corredor p va tras el corredor q, la dirección del vector velocidad de p siempre apunta hacia q (figura 1.6).

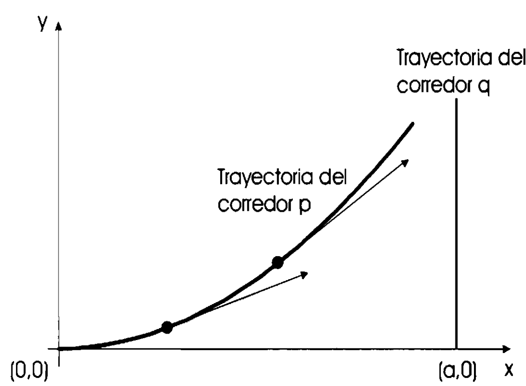


Figura 1.6: Trayectorias de los jugadores

En general, al tiempo t, p se encuentra en $(x(t), y(t))$ y como q corre en línea recta, él se encontrará a un distancia $s(t) = v_q t$ del eje x, es decir, q se encuentra en el punto $(a, v_q t)$, (ver figura 1.7).

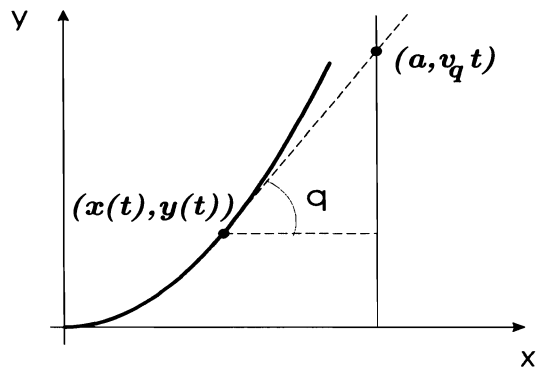


Figura 1.7: Posición de los jugadores al tiempo t

Usemos la figura 1.7 para obtener la ecuación diferencial que decribe esta situación. Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta = \frac{v_q t - y}{a - x}, \tag{1.10}$$

donde a, es una constante.

Esta ecuación tiene tres variables x, y y t, pero puede reducirse a una que contenga solamente dos de ellas. Si observamos un tramo infinitesimal de la trayectoria de p tenemos

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\
\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\
&= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \\
v_p^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}{v_p}. \tag{1.11}$$

Al derivar ambos lados de (1.10) con respecto a x, aparecerá $\dfrac{dt}{dx}$. En efecto resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(a-x)(v_q \frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dx}) - (v_q t - y)(-1)}{(a-x)^2} \\
&= \frac{(a-x)v_q \frac{dt}{dx} - (a-x)\frac{dy}{dx} + (v_q t - y)}{(a-x)^2}.
\end{aligned}$$

De acuerdo con (1.10), la última igualdad se reduce a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a-x)v_q\frac{dt}{dx} - (v_qt - y) + (v_qt - y)}{(a-x)^2} = \frac{v_q\frac{dt}{dx}}{(a-x)},$$

y usando (1.11)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v_q\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{v_p(a-x)}.$$

Así que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\frac{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{(a-x)}, \tag{1.12}$$

con $k = v_q/v_p$.

La ecuación (1.12) se resolverá en la sección 2.1 de ecuaciones de variables separables en el ejemplo 11. Su solución es

$$y = -\frac{A}{2}\frac{(a-x)^{-k+1}}{(-k+1)} + \frac{1}{2A}\frac{(a-x)^{k+1}}{(x+1)} + B, \tag{1.13}$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Ahora bien, como al tiempo $t = 0$ el corredor p está en el origen, esto es $y(0) = 0$, la ecuación (1.13) nos da

$$0 = -\frac{Aa^{-k+1}}{2(-k+1)} + \frac{a^{k+1}}{2A(k+1)} + B. \tag{1.14}$$

Hay otra condición inicial al tiempo $t = 0$, a saber $y'(0) = 0$ pues el vector velocidad de p es horizontal. Derivando (1.13)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{2}(a-x)^{-k} - \frac{1}{2A}(a-x)^k,$$

y sustituyendo $x = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{A}{2}(a-x)^{-k} - \frac{1}{2A}(a-x)^k \\
0 &= \frac{A}{2}a^{-k} - \frac{1}{2A}a^k \\
\frac{A}{2}a^{-k} &= \frac{1}{2A}a^k \\
A^2 &= a^{2k} \\
A &= a^k.
\end{aligned}$$

Sustituimos este valor de A en (1.14), para obtener el valor de B

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{a^k a^{-k+1}}{2(-k+1)} + B \\
0 &= -\frac{a}{2(-k+1)} + \frac{a}{2(k+1)} + B \\
&= \frac{-a(k+1) + a(1-k)}{2(1-k^2)} \\
&= -\frac{2ak}{2(1-k^2)} + B \\
B &= \frac{ak}{1-k^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$y = -\frac{a^k(a-x)^{-k+1}}{2(1-k)} + \frac{(a-x)^{k+1}}{2a^k(1+k)} + \frac{ak}{1-k^2}. \tag{1.15}$$

Si $v_p > v_q$, $k = \dfrac{v_q}{v_p} < 1$ y por tanto $-k+1 > 0$. Evaluando (1.15) en $x = a$ resulta

$$y = \frac{ak}{1-k^2},$$

es decir, el corredor p alcanza al corredor q en el punto $\left(a, \dfrac{ak}{1-k^2}\right)$.

Por supuesto, dependiendo de los valores de a y k se puede saber si p alcanza a q dentro de la cancha.

EJEMPLO 6. ¿ Por qué un reloj de péndulo es impreciso?

Consideremos un modelo idealizado de reloj de péndulo, formado por una cuerda de longitud l y un peso de masa m en su extremo, como se muestra en la figura 1.8.(a). Inicialmente el peso se desvía un ángulo α y luego se deja libre (ver figura 1.8.(b)).

Sea $\theta(t)$ el ángulo en radianes al tiempo t entre la cuerda y la posición vertical, de la figura 1.8.(a). Adoptamos la convención de que $\theta > 0$ cuando la masa está a la derecha de la posición de equilibrio y $\theta < 0$ cuando está a la izquierda, lo cual esencialmente significa que escogemos direcciones a lo largo del arco apuntando a la derecha como positivas y a la izquierda como negativas.

La relación entre la longitud del arco s y el ángulo θ es $s = l\theta$, de donde

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{1.16}$$

Por otra parte la fuerza causante del movimiento es el peso $w = mg$. Esta fuerza se descompone en sus componentes F_1 y F_2 en la dirección de la tangente a la trayectoria y

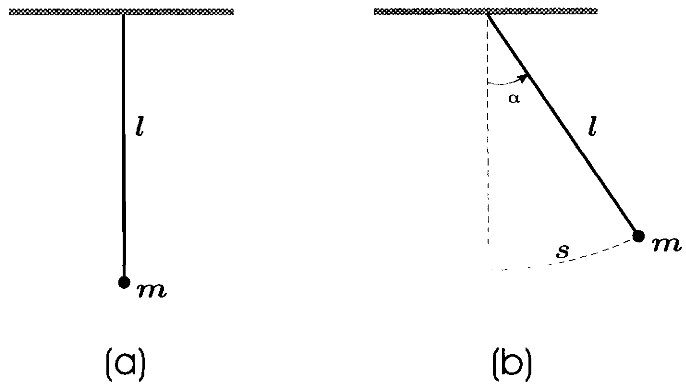


Figura 1.8: Reloj de péndulo

en la dirección de la cuerda, respectivamente. Ver figura 1.9. Es claro que $F_2 = mg\cos\theta$ se compensa con la tensión de la cuerda y

$$F_1 = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{1.17}$$

donde el signo menos se debe a que cuando $\theta > 0$ F_1 apunta a la izquierda y cuando $\theta < 0$ apunta a la derecha.

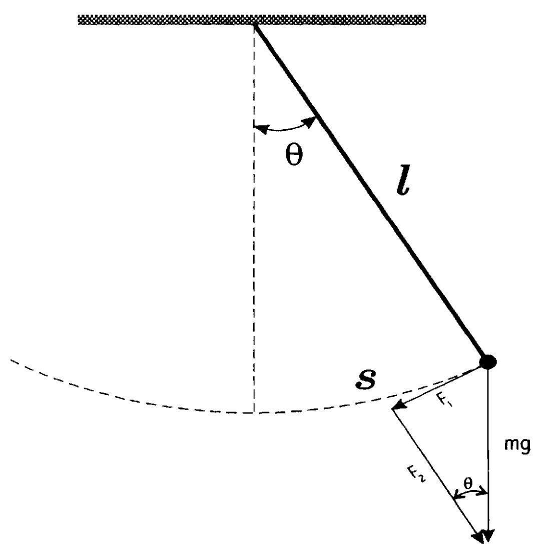


Figura 1.9: Movimiento del péndulo

La segunda ley de Newton dice que

$$ma = \sum(fuerzas),$$

y aplicada al péndulo, usando (1.16) y (1.17), conduce a

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

o equivalentemente

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{1.18}$$

Para resolver (1.18) sea $w = \frac{d\theta}{dt}$. De la regla de la cadena

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dw}{d\theta}w,$$

con lo cual (1.18) toma la forma

$$l\frac{dw}{d\theta}w + g\,\mathrm{sen}\,\theta = 0,$$

cuya solución es

$$\frac{w^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\theta + A,$$

con A una constante, así que

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + A.$$

Usando que $\theta(0) = \alpha$ y $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0$, el valor de A resulta ser $A = \left(\frac{-2g}{l}\right)\cos\alpha$, de modo que

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

de donde

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}. \tag{1.19}$$

El signo menos en (1.19) toma en cuenta el hecho de que θ decrece con el crecimiento de t. Además (1.19) implica que

$$\frac{dt}{d\theta} = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}},$$

y una segunda integración nos lleva a

$$t = -\sqrt{\frac{1}{2g}}\int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}} + B,$$

donde B es una constante. Pero, inicialmente $t = 0$, $\theta = \alpha$, así que

$$0 = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}} + B.$$

En consecuencia

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}} d\phi - \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}}. \tag{1.20}$$

Calculemos el periodo a partir de (1.20). Ya que el periodo T es el tiempo que tarda el péndulo en dar una oscilación completa, al tiempo $t = T/4$ la cuerda estará por primera vez en posición vertical, es decir haciendo $t = T/4$ y $\theta = 0$ en (1.20) resulta

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}} d\phi - \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^0 \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}},$$

o bien

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\alpha}}. \tag{1.21}$$

Como se observa en (1.21) el periodo de las oscilaciones del péndulo depende del ángulo inicial α. Precisamente este hecho es la causa principal por la que el reloj de péndulo es impreciso, ya que en la práctica el peso cada vez se desvía hacia su posición extrema en un ángulo distinto de α.

1.2 Conceptos Básicos de Ecuaciones Diferenciales

Una igualdad que contenga una o más derivadas de una función desconocida se llama **ecuación diferencial**.

Las siguientes igualdades son ejemplos de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= aP - bP^2, \qquad \text{con } a, b \text{ constantes} && (1.22)\\
\frac{d^2x}{dt^2} + 4x &= 0, && (1.23)\\
\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x &= \cos t, && (1.24)\\
\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \kappa > 0 && (1.25)\\
a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad a > 0 && (1.26)\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0. && (1.27)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores modelan cierto fenómeno. La ecuación (1.22) es llamada ecuación logística y describe el crecimiento de una población. Las ecuaciones (1.23) y (1.24) corresponden al movimiento armónico simple y forzado amortiguado, respectivamente, que estudiaremos en el capítulo 5. Las ecuaciones (1.25), (1.26) son las ecuaciones del calor y de onda en una dimensión y finalmente, la ecuación (1.27) es la ecuación de Laplace en dos dimensiones.

Se dice que una ecuación diferencial es **ordinaria**, si la función incógnita depende de una sola variable. Si la función incógnita depende de más de una variable, entonces la ecuación se llama una ecuación diferencial **parcial**.

Las ecuaciones (1.22), (1.23) y (1.24) son ordinarias, mientras que las ecuaciones (1.25), (1.26) y (1.27) son parciales.

En todo lo que sigue consideraremos únicamente ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que en ocasiones omitiremos mencionar explícitamente que se trata de ecuaciones de esta clase.

El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Así, la ecuación (1.22) es de primer orden, las ecuaciones (1.23) y (1.24) son de segundo orden. Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO 1. Determine el orden de la ecuación diferencial dada.

a) $\dfrac{dP}{dt} = \kappa P^2.$

b) $10\dfrac{d^2q}{dt^2} + 100\dfrac{dq}{dt} + 500q = 127 \operatorname{sen} 60t.$

c) $(6 \times 10^9)\dfrac{d^4y}{dx^4} = x.$

d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = x^3 - x.$

Solución. La ecuación (a) es de primer orden, las ecuaciones (b) y (d) de segundo orden y la ecuación (c) es de cuarto orden.

Simbólicamente, una ecuación diferencial ordinaria de orden n, puede expresarse en la forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.28}$$

donde F es una función de $n + 2$ variables. Para nuestros propósitos supondremos que (1.28) también admite la representación

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1.29}$$

para alguna función f de $n + 1$ variables.

Una **solución** de una ecuación diferencial en un intervalo I es cualquier función definida en I que satisface a la ecuación, es decir, que al sustituirla la reduce a una identidad.

EJEMPLO 2. Comprobar que la función $f(x) = e^{-3x} + 5$ es solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

$$y' + 3y = 15.$$

Solución. Es claro $f(x)$ y $f'(x)$ se definen para todo x en $\mathbb{R}$. Sustituyendo sus expresiones en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} -3e^{-3x} + 3(e^{-3x} + 5) &= 15 \\ -3e^{-3x} + 3e^{-3x} + 15 &= 15 \\ 15 &= 15. \end{aligned}$$

La última identidad establece que efectivamente la función f es una solución de la ecuación diferencial en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 3. Verificar que la función $g(x) = \dfrac{1}{x} + x$ es solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(0, \infty)$.

$$y'' - \frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x} = 0.$$

Solución. Sea $x > 0$. Derivando $g(x)$ obtenemos

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1, \qquad g''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Sustituyendo $g(x)$ y $g''(x)$ en la ecuación diferencial se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{x} + x\right) + \frac{2}{x} &= 0 \\ \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x} &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Lo cual comprueba que g es una solución en $(0, \infty)$.

EJEMPLO 4. Sea c una constante arbitraria. Probar que la función definida por la ecuación $xy^2 - y^3 = c$, es solución de la ecuación diferencial

$$(2x - 3y)y' + y = 0.$$

Solución. Derivando implícitamente la igualdad $xy^2 - y^3 = c$, con respecto a x, se tiene que

$$\begin{aligned} y^2 + 2xyy' - 3y^2y' &= 0 \\ y(y + 2xy' - 3yy') &= 0. \end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned} y + 2xy' - 3yy' &= 0 \\ y + (2x - 3y)y' &= 0, \end{aligned}$$

de donde se observa que la ecuación $xy^2 - y^3 = c$ define una solución de la ecuación diferencial para todo valor de c. En este caso se dice que la solución está en **forma implícita**.

EJEMPLO 5. Determine si la función $h(x) = e^{-3x}$ es una solución en $\mathbb{R}$ de la ecuación diferencial: $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Solución. Derivando dos veces la función h, tenemos que para x en $\mathbb{R}$

$$h'(x) = -3e^{-3x}, \qquad h''(x) = 9e^{-3x}.$$

Sustituyendo en la euación diferencial encontramos que

$$\begin{aligned} 9e^{-3x} + 6(-3e^{-3x}) + 9e^{-3x} &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Así, la función dada es una solución de la ecuación diferencial.

Un **problema de valores iniciales** es aquél en el que se busca determinar una solución a una ecuación diferencial, sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas, dadas para un valor de la variable independiente. Tales condiciones se llaman *condiciones iniciales*. En símbolos, un problema de valores iniciales de orden n, puede representarse por la ecuación (1.29) sujeta a las n condiciones

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{1.30}$$

En los capítulos 2 y 3 resolveremos algunos problemas de valor inicial, de primer orden, que en forma general pueden expresarse como

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), && (1.31) \\ y(x_0) &= y_0. && (1.32) \end{aligned}$$

Al encontrar un problema de este tipo, es natural preguntarse si tiene solución y en tal caso, si dicha solución es única. La respuesta a estas cuestiones viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1 (Teorema de existencia y unicidad.) *Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo en el plano que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si las funciones f y $\partial f/\partial y$ son continuas en R, entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y una función única $y(x) = \varphi(x)$ definida en I que satisface el problema de valor inicial definido por (1.31) y (1.32).*

Trataremos de explicar el significado del teorema anterior mediante los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO 6. Demuestre que el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^3 + y^3, \\ y(2) &= -1, \end{aligned}$$

tiene solución única.

Solución. Aplicamos el teorema 1.2.1. En primer lugar comprobaremos que se cumple la hipótesis. En este caso $f(x,y) = x^3 + y^3$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2$. Ambas funciones f y $\partial f/\partial y$ son continuas en todo rectángulo R del plano xy. La condición inicial $y(2) = -1$ significa que $x_0 = 2$ y $y_0 = -1$, además es claro que el punto $(2,-1)$ está contenido en el interior de algún rectángulo R. Así que todas las hipótesis del teorema 1.2.1 se satisfacen y por lo tanto la conclusión se cumple; es decir, existe una solución única φ de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = x^3 + y^3$, definida en algún intervalo I con centro en $x_0 = 2$, que satisface la condición inicial, esto es, que es tal que $\varphi(2) = -1$.

EJEMPLO 7. Considere los dos problemas de valor inicial

a) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}, \qquad y(2) = 0.$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

Aquí

$$f(x,y) = \sqrt{1-y^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Estas funciones son continuas en el conjunto A de puntos del plano xy definido por

$$A = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1\}.$$

En el problema (a), $x_0 = 2, y_0 = 0$. El cuadrado R_1 de lado 1 con centro en el punto $(2,0)$ está contenido en el conjunto A, de modo que las funciones f y $\partial f/\partial y$ satisfacen las hipótesis del teorema 1.2.1 en R_1. Dado que además el punto $(2,0)$ está en el interior de R_1, la conclusión del teorema 1.2.1 se aplica al problema (a) y sabemos que tiene una solución única definida en algún intervalo alrededor de $x_0 = 2$.

Veamos el problema (b). Ahora $x_0 = \pi/2, y_0 = 1$. En este punto $\partial f/\partial y$ no es continua. Luego, el punto $(\pi/2, 1)$ no puede estar incluido en un rectángulo R donde las hipótesis del teorema 1.2.1 se satisfagan. Entonces no podemos concluir, del teorema 1.2.1, que el problema (b) tenga una solución única. Con esto no afirmamos que no tenga solución o tenga varias; el teorema 1.2.1 simplemente no da información en un sentido u otro. De hecho puede verificarse con un cálculo sencillo que las funciones

$$y_1(x) = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y_2(x) = 1,$$

con x en $[-\pi/2, \pi/2]$, son soluciones del problema (b), así que éste tiene al menos dos soluciones definidas en el intervalo indicado.

Se llama **solución general** de una ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$ a la función $y = \varphi(x, c)$ que depende de una constante arbitraria c y satisface las siguientes condiciones:

1. Es solución de la ecuación diferencial para cualquier valor de c.

2. Dada una condición inicial arbitraria $y(x_0) = y_0$, siempre es posible determinar un valor de $c = c_0$ tal que la función $y = \varphi(x, c_0)$ satisface la ecuación diferencial y la condición inicial. La función $y = \varphi(x, c_0)$ se llama una solución particular.

Geométricamente la solución general $y = \varphi(x, c)$ representa una familia de curvas en el plano xy. Estas curvas se llaman **curvas integrales**. Si las condiciones del teorema de existencia y unicidad se satisfacen, estas curvas integrales no se intersectan.

EJEMPLO 8. Muestre que la función

$$y = \frac{c}{x}, \qquad x > 0, \tag{1.33}$$

donde c es una constante, es la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{1.34}$$

Solución. En primer lugar, podemos ver que (1.33) es solución de (1.34) para todo c. En efecto, derivando (1.33) con respecto a x se obtiene

$$y' = -\frac{c}{x^2},$$

y sustituyendo en (1.34) resulta

$$-\frac{c}{x^2} = -\frac{c/x}{x} = -\frac{c}{x^2},$$

lo cual es una identidad.

Además, haciendo $x = x_0 > 0$ y $y = y_0$ en (1.33), se sigue que

$$y_0 = \frac{c}{x_0},$$

de donde

$$c = x_0 y_0,$$

por lo cual, la función

$$y = \frac{x_0 y_0}{x},$$

es solución de (1.33) y satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$, con $x_0 > 0$ y y_0 arbitrario.

La figura 1.10 muestra algunas de las curvas integrales con $c > 0$.

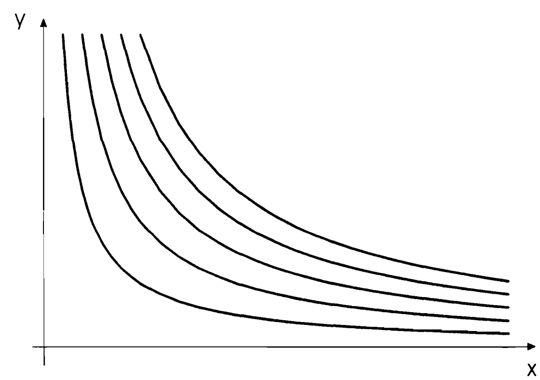


Figura 1.10: Curvas integrales

1.2.1 Método de Isoclinas

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.35}$$

donde la función $f(x, y)$ está definida en algún conjunto D del plano xy, determina en cada punto (x, y) de D, el valor de y', o sea, la pendiente de la recta tangente a la curva integral en este punto. Luego, podemos interpretar la ecuación diferencial (1.35) como un conjunto de pendientes llamado *campo de direcciones*. La terna de números (x, y, y') determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x, y). El conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del campo de direcciones.

El problema de resolver la ecuación diferencial (1.35) puede entonces interpretarse como sigue: encontrar una curva cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo en este punto. Para construir las curvas integrales introducimos las *isoclinas*. Se llama *isoclina* al lugar geométrico de los puntos en los que las rectas tangentes a las curvas integrales consideradas tienen una misma dirección. La familia de las isoclinas de la ecuación diferencial (1.35) viene dada por la condición

$$f(x, y) = c, \tag{1.36}$$

donde c es una constante. Usando valores de c cercanos podemos dibujar una red bastante compacta de isoclinas, a partir de las cuales es posible trazar aproximadamente las curvas integrales de la ecuación (1.35).

EJEMPLO 1. Mediante las isoclinas, trace aproximadamente las curvas integrales de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x. \tag{1.37}$$

Solución. En este caso $f(x, y) = x$ y las isoclinas están dadas por la ecuación $x = c$, donde c es una constante. En consecuencia las isoclinas son rectas verticales. Para $c = 0$ se obtiene la isoclina $x = 0$, el eje y. Este eje divide al plano en dos partes iguales, en cada una de las cuales la derivada y' tiene un mismo signo. Las curvas integrales son decrecientes si $x < 0$ y crecientes si $x > 0$, de modo que sobre esta recta se encuentran sus puntos mínimos.

Las tangentes trazadas a las curvas integrales en los puntos de intersección con las isoclinas $x = -1$ y $x = 1$, forman con el eje OX, ángulos de 45° y 135°, respectivamente. El campo de direcciones se muestra en la figura 1.11.

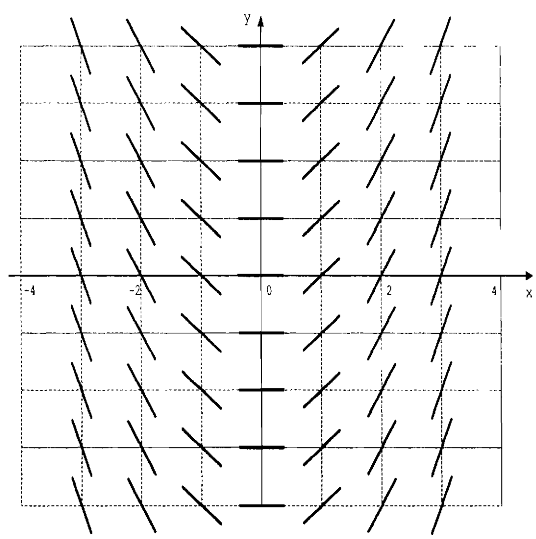


Figura 1.11: Campo de direcciones

Además, derivando en (1.37) con respecto a x, se sigue que $y'' = 1$. Por consiguiente $y'' > 0$ para todo x y las curvas integrales son cóncavas hacia arriba. Tomando en cuenta todo lo anterior un esbozo de la familia de curvas integrales de la ecuación (1.37) se muestra en la figura 1.12.

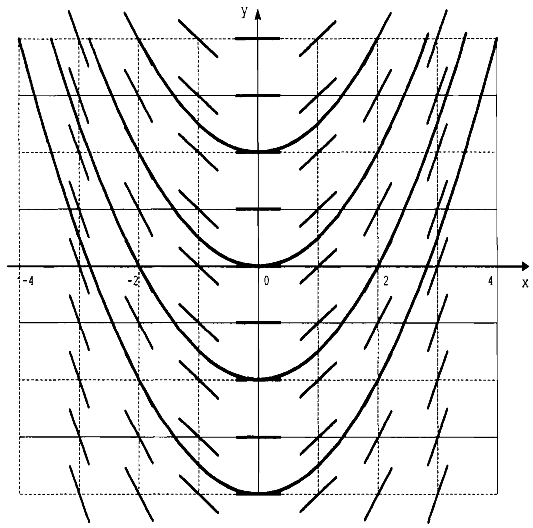


Figura 1.12: Curvas Integrales del Ejemplo 1

EJEMPLO 2. Represente el campo de direcciones e indique algunas curvas integrales de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{1.38}$$

Solución. Ahora $f(x,y) = -\dfrac{x}{y}$ y las isoclinas son rectas de la forma $-\dfrac{x}{y} = c$ o bien

$$y = -\frac{x}{c}.$$

Si $c = 1$ tenemos la isoclina $y = -x$ a lo largo de la cual la inclinación de las tangentes a las curvas integrales es de 45°. Con $c = -1$ resulta la isoclina $y = x$ sobre la cual las tangentes forman un ángulo de 135° con respecto al eje OX.

Además, a partir de la ecuación diferencial misma podemos concluir lo siguiente. Las tangentes trazadas a las curvas integrales en los puntos de intersección con el eje x $(y = 0)$ y con el eje y $(x = 0)$ son verticales y horizontales, respectivamente, con excepción del punto $(0, 0)$.

El campo de direcciones y algunas curvas integrales se muestran en la figura 1.13.

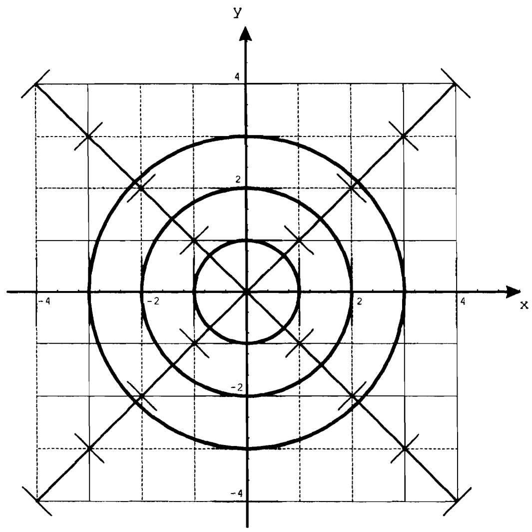


Figura 1.13: Campo de direcciones y Curvas Integrales

EJEMPLO 3. Utilizando el campo de direcciones y las isoclinas determine aproximadamente la curva integral de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 1. \tag{1.39}$$

Solución. Tenemos que $f(x, y) = x^2+y^2$ y las isoclinas $f(x, y) = c$ son las circunferencias con centro en el origen definidas por

$$x^2 + y^2 = c, \qquad c > 0.$$

Con los valores de $c = 1/4$, $c = 1$, $c = 9/4$ y $c = 4$ resultan las circunferencias de radios $1/2, 1, 3/2$ y 2, respectivamente, que se muestran en la figura 1.14. A lo largo de cada una de ellas las pendientes de las tangentes a las curvas integrales es igual al valor particular de c.

Examinando la figura 1.14 parece razonable que la gráfica de la solución del problema (1.39) tenga la forma que se indica en la figura 1.15. Cabe destacar el valor de este análisis, en vista de que el problema (1.39) no puede resolverse empleando técnicas elementales.

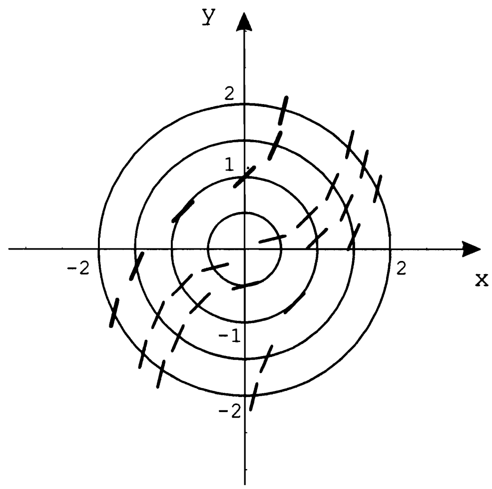


Figura 1.14: Campo de direcciones e Isoclinas

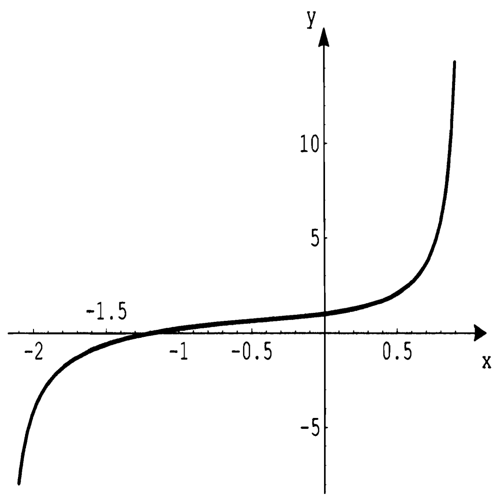


Figura 1.15: Solución del problema de valor inicial

EJERCICIOS 1.2

En cada ejercicio indique el orden de la ecuación diferencial y determine si la función dada es una solución de la ecuación.

1. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y, \qquad y = Axe^{x^2}.$
2. $y' + y\cos x = \cos x \operatorname{sen} x, \qquad y = ce^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x + 1.$
3. $y' + y\tan x = 0, \qquad y = A\cos x.$
4. $y' = \dfrac{y+x}{y-x}, \qquad x^2 - y^2 + 2xy = c.$
5. $y' = \dfrac{1}{x}y + 1, \qquad y = x\ln x.$
6. $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0, \qquad A(x+y)^2 = xe^{\frac{y}{x}}.$
7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \qquad y = \cos x + \operatorname{sen} x.$
8. $y''' - y'' = x, \qquad y = -\dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1 + ke^k, \quad k \in \mathbb{R}.$
9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = \cos x, \qquad y = \cos x - \operatorname{sen} x.$
10. $y'' + 2y' - 3y = 1, \qquad y = e^x - \dfrac{1}{3}.$

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

2.1 Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables

Definición 2.1.1 *Se dice que una ecuación diferencial ordinaria es de* **variables separables** *si se puede escribir en la forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}. \tag{2.1}$$

La ecuacion (2.1) se expresa en forma diferencial como

$$g(y)dy = f(x)dx, \tag{2.2}$$

y se resuelve integrando ambos miembros de (2.2).

EJEMPLO 1. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{2.3}$$

Solución. Separando las variables resulta

$$dy = 2xdx,$$

e integrando

$$\int dy = \int 2xdx.$$

Resolviendo las integrales

$$\begin{aligned} y + c_1 &= x^2 + c_2 \\ y &= x^2 + c_2 - c_1. \end{aligned}$$

Ya que la diferencia de constantes es una constante, podemos escribir $c = c_2 - c_1$, obteniendo

$$y = x^2 + c.$$

Así, al momento de integrar sólo consideraremos **una** constante de integración.

EJEMPLO 2. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \tag{2.4}$$

Solución. Separando variables la ecuación se escribe como

$$ydy = xdx,$$

integrando

$$\int ydy = \int xdx$$

y calculando las integrales, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + c_1 \\ y^2 &= x^2 + 2c_1. \end{aligned}$$

Como el producto de constantes es una constante tenemos

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + c \\ y &= \sqrt{x^2 + c}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Resolver

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 0. \tag{2.5}$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 4xy &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -4xy \\ dy &= -4xydx \\ \frac{dy}{y} &= -4xdx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int -4xdx \\ \ln y &= -2x^2 + c_1 \\ e^{\ln y} &= e^{-2x^2 + c_1}. \end{aligned}$$

Ya que e^u y $\ln u$ son funciones inversas,

$$y = e^{-2x^2} e^{c_1}.$$

Como c_1 es una constante, e^{c_1} también es una constante, la cual podemos escribir simplemente como c; de modo que

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x^2} c \\ y &= ce^{-2x^2}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 - 2y}. \tag{2.6}$$

Solución. Procediendo como en los ejemplos anteriores, resulta

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y \cos x}{1 - 2y} \\ (1 - 2y)dy &= y \cos x dx \\ \frac{1 - 2y}{y} dy &= \cos x dx \\ \int \left(\frac{1}{y} - 2 \right) dy &= \int \cos x dx \\ \ln y - 2y &= \operatorname{sen} x + c. \end{aligned}$$

En este caso la solución queda en forma implícita.

EJEMPLO 5. Resolver

$$\frac{dy}{dx} + e^{x-y} = 0. \tag{2.7}$$

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + e^{x-y} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -e^{x-y} \\ \frac{dy}{dx} &= -e^x e^{-y} \\ \frac{dy}{e^{-y}} &= -e^x dx \\ e^y dy &= -e^x dx \\ \int e^y dy &= -\int e^x dx \\ e^y &= -e^x + c \\ \ln e^y &= \ln(-e^x + c) \\ y &= \ln(-e^x + c). \end{aligned}$$

EJEMPLO 6. Resolver

$$(yx - y)dy - (y+1)dx = 0. \tag{2.8}$$

Solución. Separando variables se sigue que

$$\begin{aligned} (yx - y)dy - (y+1)dx &= 0 \\ (yx - y)dy &= (y+1)dx \\ y(x-1)dy &= (y+1)dx \\ \frac{y}{y+1}dy &= \frac{dx}{x-1}, \end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{y+1}dy &= \int \frac{dx}{x-1} \\ \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy &= \int \frac{dx}{x-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y - \ln(y+1) = \ln(x-1) + c.$$

es la solución dada en forma implícita.

EJEMPLO 7. Resolver

$$(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = (1+y^2)dx. \tag{2.9}$$

Solución. Para separar variables es de gran ayuda factorizar donde sea posible, en este caso tenemos

$$\begin{aligned} (1 + x^2 + y^2(1+x^2))dy &= (1+y^2)dx \\ (1+x^2)(1+y^2)dy &= (1+y^2)dx \\ \frac{1+y^2}{1+y^2}dy &= \frac{1}{1+x^2}dx \\ dy &= \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, al integrar encontramos que

$$\begin{aligned} \int dy &= \int \frac{dx}{1+x^2} \\ y &= \arctan x + c. \end{aligned}$$

EJEMPLO 8. Resolver el problema de valor inicial

$$1 + e^{-3x}y' = 0 \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 1. \tag{2.10}$$

Solución. Separando variables e integrando obtenemos

$$\begin{aligned}
1 + e^{-3x}y' &= 0 \\
e^{-3x}\frac{dy}{dx} &= -1 \\
e^{-3x}dy &= -dx \\
dy &= -e^{3x}dx \\
\int dy &= -\int e^{3x}dx \\
y &= -\frac{e^{3x}}{3} + c.
\end{aligned}$$

Haciendo $x = 0$ y $y = 1$ en la última igualdad, concluimos que

$$\begin{aligned}
1 &= -\frac{e^0}{3} + c \\
1 &= -\frac{1}{3} + c \\
\frac{4}{3} &= c.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial que cumple la condición dada es

$$y = -\frac{e^{3x}}{3} + \frac{4}{3}.$$

EJEMPLO 9. Resolver el problema de valor inicial

$$y' + y^2 - y = 0, \qquad y(2) = 4. \tag{2.11}$$

Solución. Primero separamos variables

$$\begin{aligned}
y' + y^2 - y &= 0 \\
y' &= y - y^2 \\
\frac{dy}{dx} &= y - y^2 \\
dy &= (y - y^2)dx \\
\frac{dy}{y - y^2} &= dx.
\end{aligned}$$

En segundo lugar integramos, usando fracciones parciales para la integral respecto de y. Obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y(1-y)} &= \int dx \\
\ln y - \ln(1-y) &= x + c_1 \\
\ln \frac{y}{1-y} &= x + c_1 \\
\frac{y}{1-y} = e^{x+c_1} &= e^x e^{c_1} = ce^x.
\end{aligned}
$$

Ahora, despejamos y en la última igualdad

$$
\begin{aligned}
y &= c(1-y)e^x \\
y &= ce^x - cye^x \\
y + cye^x &= ce^x \\
y(1+ce^x) &= ce^x,
\end{aligned}
$$

obtenemos así la solución explícita

$$
y = \frac{ce^x}{1+ce^x}. \tag{2.12}
$$

Si hacemos $x = 2$ y $y = 4$ en (2.12), tenemos

$$
\begin{aligned}
4 &= \frac{ce^2}{1+ce^2} \\
4(1+ce^2) &= ce^2 \\
4 + 4ce^2 &= ce^2 \\
3ce^2 &= -4 \\
c &= -\frac{4}{3}e^{-2}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustituyendo el valor de c en (2.12), llegamos a la solución particular

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{-\frac{4}{3}e^{-2}e^x}{1+(-\frac{4}{3}e^{-2})e^x} \\
y &= \frac{-\frac{4}{3}e^{x-2}}{\frac{3-4e^{x-2}}{3}} \\
y &= \frac{-4e^{x-2}}{3-4e^{x-2}}.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 10. Resolver el problema de valor inicial

$$e^y \cos x + \cos x + (e^y \operatorname{sen} x + e^y)y' = 0, \qquad y(\pi) = 0. \tag{2.13}$$

Solución. Separando variables e integrando se sigue que

$$\begin{aligned}
e^y \cos x + \cos x + (e^y \operatorname{sen} x + e^y)y' &= 0 \\
\cos x(e^y + 1) + e^y(\operatorname{sen} x + 1)\frac{dy}{dx} &= 0 \\
e^y(\operatorname{sen} x + 1)\frac{dy}{dx} &= -\cos x(e^y + 1) \\
e^y(\operatorname{sen} x + 1)dy &= -\cos x(e^y + 1)dx \\
\frac{e^y}{e^y + 1}dy &= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1}dx \\
\ln(e^y + 1) &= -\ln(\operatorname{sen} x + 1) + \ln c_1 \\
\ln(e^y + 1) &= \ln \frac{c_1}{\operatorname{sen} x + 1}.
\end{aligned}$$

Ahora despejamos y para expresar la solución en forma explícita

$$e^y = \frac{c_1 - \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1},$$

es decir

$$y = \ln \frac{c - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + 1} \tag{2.14}$$

con $c = c_1 - 1$.

Se quiere una solución que cumpla con $y(\pi) = 0$, entonces

$$0 = \ln\left(\frac{c - \operatorname{sen} \pi}{\operatorname{sen} \pi + 1}\right) = \ln c,$$

de donde

$$c = 1.$$

Sustituyendo en (2.14) obtenemos la solución del problema de valor inicial

$$y = \ln \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}.$$

La siguiente ecuación diferencial es de segundo orden, sin embargo, mediante un cambio de variable se reduce a una de primer orden. Corresponde a la ecuación diferencial (1.12) del ejemplo 5 del capítulo 1.

EJEMPLO 11. Resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{(a-x)}, \tag{2.15}$$

donde a, k son constantes tales que $a \in \mathbb{R}, k \neq 0, 1$ y $x < a$.
Solución. Si hacemos

$$z = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

la ecuación (2.15) se reduce a

$$\frac{dz}{dx} = k\frac{\sqrt{1+z^2}}{a-x}.$$

Separando variàbles e integrando resulta

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{kdx}{a-x} \\
\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \int \frac{kdx}{a-x} \\
\ln(z+\sqrt{1+z^2}) &= -k\ln(a-x) + \ln A \\
\ln(z+\sqrt{1+z^2}) &= \ln A(a-x)^{-k} \\
z+\sqrt{1+z^2} &= A(a-x)^{-k},
\end{aligned}$$

donde A es una constante. Así que

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = A(a-x)^{-k}. \tag{2.16}$$

Para obtener y necesitamos hacer una segunda integración, pero antes escribimos (2.16) en la forma

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= A(a-x)^{-k} - \frac{dy}{dx} \\
1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= A^2(a-x)^{-2k} - 2A(a-x)^{-k}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\
1 &= A^2(a-x)^{-2k} - 2A(a-x)^{-k}\frac{dy}{dx} \\
2A(a-x)^{-k}\frac{dy}{dx} &= A^2(a-x)^{-2k} - 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{A^2(a-x)^{-2k}-1}{2A(a-x)^{-k}} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{A}{2}(a-x)^{-k} - \frac{1}{2A}(a-x)^{k} \\
dy &= \left[\frac{A}{2}(a-x)^{-k} - \frac{1}{2A}(a-x)^{k}\right] dx.
\end{aligned}$$

Ahora podemos integrar facilmente, encontrando la solución explícita siguiente

$$\begin{aligned} \int dy &= \int \left[\frac{A}{2}(a-x)^{-k} - \frac{1}{2A}(a-x)^{k} \right] dx \\ y &= -\frac{A(a-x)^{-k+1}}{2(-k+1)} + \frac{(a-x)^{k+1}}{2A(k+1)} + B. \end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.1

Mediante separación de variables resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $4tx\dfrac{dx}{dt} = x^2 + 1$

2. $(y \ln x)^{-1}\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2$

3. $\dfrac{d\theta}{dt} = \cos t(\cos 2\theta - \cos^2\theta)$

4. $\dfrac{dy}{dt} = e^{-2t+3y}$

5. $\dfrac{dy}{dx} + y = yxe^{x+2}$

6. $e^x y dy - (e^{-y} + e^{2x-y})dx = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy - 3y + x - 3}{xy + 2y - x - 2}$

8. $2tx^2 + 2t + (t^4 + 1)x' = 0, \quad x(0) = 1$

9. $\dfrac{2r-1}{t}dr + \dfrac{r - 2r^2}{t^2 - 1}dt = 0, \quad r(2) = 4$

10. $\dfrac{1}{(y-1)^2}dx + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}dy = 0$

2.2 Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Definición 2.2.1 *La función $f(x,y)$ se llama homogénea de grado n con respecto a las variables x, y si para todo t se verifica que*

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

EJEMPLO 1. Diga si la función dada es homogénea y determine su grado.

a) $f(x,y) = 2x^3 - 5xy^2 + 4y^3$.

b) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + x^2y + x}{y^3}$.

e) $f(x,y) = y + x(\ln x - \ln y - 1)$.

f) $f(x,y) = \operatorname{sen}\dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} + e^{-2y/x} + 6$.

Solución.

a) En este caso

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= 2(tx)^3 - 5(tx)(ty)^2 + 4(ty)^3 \\ &= 2t^3x^3 - 5t^3xy^2 + 4t^3y^3 \\ &= t^3(2x^3 - 5xy^2 + 4y^3) \\ &= t^3 f(x,y), \end{aligned}$$

lo cual muestra que la función $f(x,y) = 2x^3 - 5xy^2 + 4y^3$ es una función homogénea de grado tres.

b) Se tiene que

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \sqrt[5]{(tx)^5 + (ty)^5} \\ &= \sqrt[5]{t^5x^5 + t^5y^5} \\ &= \sqrt[5]{t^5(x^5 + y^5)} \\ &= t\,\sqrt[5]{x^5 + y^5} \\ &= tf(x,y). \end{aligned}$$

Luego, $f(x.y)=\sqrt[5]{x^5+y^5}$ si es una función homogénea y de grado uno.

c) Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \frac{t^2x^2-t^2y^2}{(tx)(ty)} \\ &= \frac{t^2(x^2-y^2)}{t^2xy} \\ &= t^0\frac{x^2-y^2}{xy} \\ &= t^0 f(x,y). \end{aligned}$$

Así, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ es homogénea de grado cero.

d) Como

$$f(tx,ty)=\frac{t^3x^3+t^3x^2y+tx}{t^3y^3},$$

concluimos que $f(x,y)=\dfrac{x^3+x^2y+x}{y^3}$ no es homogénea.

e) Se tiene que

$$f(x,y)=y+x\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

por lo cual

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= ty+tx\left(\ln\frac{tx}{ty}-1\right) \\ &= t\left[y+x\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)\right] \\ &= tf(x,y). \end{aligned}$$

Lo cual muestra que $f(x,y)$ si es una función homogénea y de grado uno.

f) Ahora tenemos

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \operatorname{sen}\frac{ty}{tx}+\frac{(ty)^2}{(tx)^2}+e^{-2ty/tx}+6 \\ &= \operatorname{sen}\frac{ty}{tx}+\frac{t^2y^2}{t^2x^2}+e^{-2ty/tx}+6 \\ &= \operatorname{sen}\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}+e^{-2y/x}+6 \\ &= t^0f(x,y), \end{aligned}$$

así que $f(x,y)$ es homogénea de grado cero.

Definición 2.2.2 *Se dice que la ecuación diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

es **homogénea** *si las funciones M y N son homogéneas y del mismo grado.*

Note que la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y),$$

será homogénea si f es una función homogénea de grado cero.

Método de Solución. Una ecuación diferencial homogénea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, se resuelve reduciéndola a una ecuación de variables separables, usando cualquiera de las sustituciones $v = y/x$ o bien $v = x/y$, donde v es una nueva variable.

Nota: Aunque en teoría cualquiera de las dos sustituciones anteriores reduce una ecuación homogénea a una separable, en la práctica sugerimos utilizar

- $y = xv$ si N es de estructura "más simple" que M. y
- $x = yv$ si M es de estructura "más simple" que N.

El tomar en cuenta esta observación, conduce a integrales más fáciles de calcular al resolver la ecuación diferencial separable que se obtiene.

EJEMPLO 1. Resolver

$$(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0. \tag{2.17}$$

Solución. Como

$$M(x,y) = x^3 + y^3 \quad \text{y} \quad N(x,y) = -xy^2$$

son funciones homogéneas ambas de grado tres, la ecuación dada es homogénea. Además N es de estructura algebraica más simple que M, por lo cual, la sustitución más conveniente es $y = xv$ para reducir (2.17) a una ecuación de variables separables.

Hacemos

$$\begin{aligned} y &= xv \\ dy &= xdv + vdx. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \left[x^3 + (xv)^3\right] dx - x(xv)^2(xdv + vdx) &= 0 \\ (x^3 + x^3v^3)dx - x^3v^2(xdv + vdx) &= 0 \\ x^3(1 + v^3)dx - x^3v^2(xdv + vdx) &= 0 \\ (1 + v^3)dx - v^2(xdv + vdx) &= 0 \\ dx + v^3dx - xv^2dv - v^3dx &= 0 \\ dx &= xv^2dv \\ \frac{dx}{x} &= v^2dv. \end{aligned}$$

Integrando

$$\ln \mid x \mid + \ln \mid c \mid = \frac{v^3}{3},$$

de donde

$$v^3 = 3 \ln \mid cx \mid .$$

Reemplazando $v = \dfrac{y}{x}$ y simplificando encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{y^3}{x^3} &= 3 \ln \mid cx \mid \\ y &= x \sqrt[3]{3 \ln \mid cx \mid}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0. \tag{2.18}$$

Solución. Ya que

$$M(x, y) = y + \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad N(x, y) = -x$$

son funciones homogéneas ambas de grado uno, nuestra ecuación a resolver es homogénea. Como en el ejemplo anterior N es de estructura algebraica mas simple que M. Por lo cual hacemos

$$\begin{aligned} y &= xv \\ dy &= xdv + vdx. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \left(xv + \sqrt{x^2 + x^2v^2}\right) dx - x(xdv + vdx) &= 0 \\ \left(xv + \sqrt{x^2(1 + v^2)}\right) dx - x^2dv - xvdx &= 0 \\ x\sqrt{1 + v^2}dx - x^2dv &= 0 \\ \frac{dx}{x} - \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Integrando

$$\ln \mid x \mid - \ln \mid v + \sqrt{1 + v^2} \mid = \ln \mid c_1 \mid,$$

reemplazando $v = \frac{y}{x}$ y simplificando, encontramos que

$$\ln |x| - \ln \left| \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right| = \ln |c_1|$$

$$
\begin{aligned}
\ln|x| - \ln\left|\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right| &= \ln|c_1| \\
\ln\left|\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \ln|c_1| \\
\frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}} &= c_1 \\
x^2 &= c_1(y+\sqrt{x^2+y^2}) \\
y+\sqrt{x^2+y^2} &= cx^2,
\end{aligned}
$$

donde $c = 1/c_1$.

EJEMPLO 3. Resolver

$$2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0. \tag{2.19}$$

Solución. En este caso la estructura algebraica de $M(x,y)$ es más simple que la de $N(x,y)$, por lo cual proponemos

$$
\begin{aligned}
x &= yv, \\
dx &= ydv + vdy.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$2vy^2(ydv + vdy) + (y^2 - 3y^2v^2)dy = 0,$$

o bien

$$
\begin{aligned}
2vydv + (1-v^2)dy &= 0 \\
\frac{2v}{1-v^2}dv + \frac{dy}{y} &= 0.
\end{aligned}
$$

Integrando

$$\ln|y| - \ln|1-v^2| = \ln|c_1|,$$

y usando $v = \dfrac{x}{y}$, obtenemos como solución implícita

$$c(y^2 - x^2) = y^3.$$

EJEMPLO 4. Resolver

$$y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy. \tag{2.20}$$

Solución. Escribimos primero la ecuación diferencial como

$$y\ln\frac{x}{y}dx = \left(x\ln\frac{x}{y} - y\right)dy.$$

Ponemos $x = vy$ en la ecuación diferencial, de lo cual se obtiene

$$y \ln v(vdy + ydv) = (vy \ln v - y)dy,$$

o equivalentemente

$$\ln v dv = -\frac{dy}{y}.$$

Integramos

$$v \ln v - v = -\ln y + c.$$

En términos de la variable original, la solución es

$$x(\ln x - 1) + (y - x)\ln y = cy.$$

EJEMPLO 5. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2}{xy}. \tag{2.21}$$

Solución. Escribimos la ecuación diferencial como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-\frac{y}{x}} + (\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}.$$

Hacemos

$$v = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = xv.$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v.$$

Sustituyendo

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{e^{-v} + v^2}{v}.$$

Separando variables

$$ve^v dv = \frac{dx}{x}$$

e integrando

$$ve^v - e^v = \ln|x| + c.$$

La solución, en forma implícita es

$$ye^{\frac{y}{x}} - xe^{\frac{y}{x}} - x\ln|x| = cx.$$

Proposición. Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right),$$

donde $a_i, b_i, c_i \in R \quad (i = 1, 2)$, se denominan cuasi-homogéneas y se reducen a homogéneas, haciendo el cambio de variables

$$x = X + h, \quad y = Y + k,$$

siendo h y k las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Si el sistema no tiene solución, es decir

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda,$$

la ecuación diferencial puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) \\ &= F(a_1x + b_1y), \end{aligned}$$

la cual se reduce a separable con la sustitución

$$z = a_1x + b_1y.$$

EJEMPLO 6. Resuelve la ecuación diferencial cuasi-homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}. \tag{2.22}$$

Solución. Hacemos

$$x = X + h, \quad y = Y + k.$$

Entonces

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$$

y sustituyendo en la ecuación, se tiene

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3Y - 7X - 7h + 3k + 7}{3X - 7Y + 3h - 7k - 3}. \tag{2.23}$$

Para que esta ecuación diferencial sea homogénea es necesario que

$$\begin{aligned} -7h + 3k + 7 &= 0 \\ 3h - 7k - 3 &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones lineales es

$$h = 1, \quad k = 0.$$

Con estos valores de h y k la ecuación diferencial se reduce a

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3Y - 7X}{3X - 7Y},$$

que es homogénea.

Hacemos ahora

$$V = \frac{Y}{X} \Longleftrightarrow Y = XV.$$

Sustituyendo, se obtiene

$$X\frac{dV}{dX} + V = \frac{3V - 7}{3 - 7V},$$

o bien, separando variables

$$\frac{3 - 7V}{V^2 - 1}dV - 7\frac{dX}{X} = 0$$

e integrando resulta

$$2\ln|V - 1| + 5\ln|V + 1| + 7\ln|X| = \ln|c|.$$

Regresando a las variables originales

$$V = \frac{Y}{X}, \quad Y = y, \quad X = x - 1,$$

obtenemos como solución general de la ecuación diferencial

$$(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = c.$$

El siguiente ejemplo es una ecuación diferencial de segundo orden, pero una vez más, utilizando un cambio de variable se transforma en una ecuación diferencial de primer orden que además es cuasi-homogénea. Corresponde a la ecuación (1.7) que apareció en el ejemplo 3 del capítulo 1.

EJEMPLO 7. Resolver

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(y - p)\frac{dy}{dx} - x = 0, \tag{2.24}$$

donde p es una constante.

Solución. Poniendo $w = \dfrac{dy}{dx}$, (2.24) se escribe como

$$xw^2 - 2(y - p)w - x = 0.$$

Esto nos hace recordar el trinomio cuadrático, por lo que despejando w, obtenemos

$$w = \frac{2(y-p) \pm \sqrt{4(y-p)^2 + 4x^2}}{2x},$$

o bien,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-p}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y-p}{x}\right)^2 + 1}, \tag{2.25}$$

la cual como sabemos es una ecuación cuasi-homogénea. Si ponemos $v = \dfrac{y-p}{x}$, $vx = y - p$ y naturalmente,

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{dy}{dx}. \tag{2.26}$$

Ahora bien, si usamos (2.25) y seleccionamos el signo más, la ecuación (2.26) se reduce a

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{v^2+1}.$$

Separamos variables e integramos.

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} &= \int \frac{dx}{x} \\
\ln(v + \sqrt{v^2+1}) &= \ln x + c \\
v + \sqrt{v^2+1} &= e^c x \\
\left(\frac{y-p}{x}\right) + \sqrt{\left(\frac{y-p}{x}\right)^2 + 1} &= Ax, \quad A = e^c.
\end{aligned}$$

La gráfica de la solución obtenida es una parábola. Para verlo, despejemos la raíz

$$\sqrt{\left(\frac{y-p}{x}\right)^2 + 1} = Ax - \left(\frac{y-p}{x}\right),$$

elevamos al cuadrado y simplificamos para obtener

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y-p}{x}\right)^2 + 1 &= A^2x^2 - 2Ax\left(\frac{y-p}{x}\right) + \left(\frac{y-p}{x}\right)^2 \\
1 &= A^2x^2 - 2A(y-p) \\
1 - A^2x^2 &= -2A(y-p) \\
\frac{1-A^2x^2}{-2A} &= y - p \\
\frac{A^2x^2-1}{2A} + p &= y \\
y &= \frac{A^2x^2 + 2Ap - 1}{2A}.
\end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.2

Resolver:

1. $(x-y)dx + xdy = 0$
2. $y^3dx + 2(x^3 - xy^2)dy = 0$
3. $(x\tan\frac{y}{x} + y)dx - xdy = 0$
4. $(x^3 + y^2\sqrt{x^2+y^2})dx - xy\sqrt{x^2+y^2}dy = 0$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2x^3-y^3)}{x(2y^3-x^3)}$
6. $(2xy + 3y^2)dx = (2xy + x^2)dy \quad$ con $\quad y(1) = 1$
7. $(3x - y - 9)\frac{dy}{dx} = 10 - 2x + 2y$
8. $(2x + 3y + 4)dx = (4x + 6y + 1)dy$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x\cos^2\frac{y}{x}}{x} \quad$ con $\quad y(1) = \frac{\pi}{4}$
10. $\left[y\cos\frac{x}{y} + y\sec^2\frac{x}{y}\right]dx + \left[2y\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{y} + 2y\tan\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y} - x\sec^2\frac{x}{y}\right]dy = 0$

2.3 Ecuaciones Diferenciales Exactas

Definición 2.3.1 *Si $z = f(x,y)$ es una función con derivadas parciales de primer orden continuas en una región rectangular R del plano xy, entonces su diferencial total, denotada por dz o df, se define como*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Ahora bien si $f(x,y) = c$, donde c es una constante, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

de modo que la solución de la ecuación diferencial $df = 0$ está dada implícitamente por $f(x,y) = c$.

EJEMPLO. Si $f(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = c$, entonces $df = 0$, es decir

$$(4x^3 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 3y^2)\,dy = 0, \tag{2.27}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 + 6xy^2}{6x^2y + 3y^2}.$$

Note que la ecuación diferencial (2.27) no es separable ni tampoco homogénea, decimos que es exacta y su solución es $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = c$.

De manera general hacemos la siguiente definición.

Definición 2.3.2 *Se dice que una ecuación diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.28}$$

es **exacta** *si puede escribirse en la forma $df = 0$, es decir*

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Equivalentemente, la ecuación diferencial (2.28) es exacta si existe una función f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y). \tag{2.29}$$

Note que, la solución de una ecuación diferencial exacta está dada implícitamente por la ecuación $f(x,y) = c$, donde c es una constante arbitraria.

A la función f que cumple las ecuaciones (2.29) se le denomina *función potencial*, mientras que a la función vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\,\mathbf{i} + N(x,y)\,\mathbf{j}, \tag{2.30}$$

se le llama *campo vectorial conservativo*. En este contexto, resolver la ecuación diferencial exacta (2.28) es equivalente a encontrar la función potencial del campo (2.30). Puede consultarse [8], para estudiar esta clase de campos vectoriales.

El siguiente teorema proporciona un criterio simple para determinar si una ecuación diferencial es exacta. Su aplicación queda clara en los ejemplos posteriores.

Teorema 2.3.1 *Sean las funciones M, N, M_y y N_x continuas en la región rectangular R. Entonces la ecuación*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

es exacta en R si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \tag{2.31}$$

para todo punto (x,y) en R.

EJEMPLO 1. Resolver

$$y\,dx + \left(x + \frac{2}{y}\right) dy = 0. \tag{2.32}$$

Solución. Verifiquemos, primero, que (2.32) es una ecuación diferencial exacta. Aquí tenemos que

$$M(x,y) = y \qquad \text{y} \qquad N(x,y) = x + \frac{2}{y},$$

y como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

afirmamos que (2.32) es una ecuación diferencial exacta. Luego, existe una función $f(x,y)$ tal que la ecuación (2.32) se puede escribir en la forma $df(x,y) = 0$. Es decir, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) = y \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y) = x + \frac{2}{y}. \tag{2.34}$$

Para determinar f integramos (2.33) con respecto de x, resulta

$$f(x,y) = \int y dx,$$

o bien

$$f(x,y) = xy + \phi(y), \tag{2.35}$$

donde $\phi(y)$ es una función de y, ya que integramos con respecto de x.

Derivando (2.35) parcialmente con respecto a y se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \phi'(y), \tag{2.36}$$

pero como deseamos que también se satisfaga (2.34), igualando (2.36) con (2.34), se sigue que

$$x + \phi'(y) = x + \frac{2}{y}.$$

Luego

$$\phi'(y) = \frac{2}{y}.$$

Integrando ahora ambos lados respecto a y obtenemos

$$\phi(y) = 2\ln y + c_1,$$

con c_1 una constante arbitraria.

Sustituimos $\phi(y)$ en (2.35) y se tiene que

$$f(x,y) = xy + 2\ln y + c_1.$$

Finalmente, igualamos $f(x,y)$ con una constante k para obtener la siguiente solución de (2.32), definida implicitamente

$$\begin{aligned} xy + 2\ln y + c_1 &= k \\ xy + 2\ln y &= k - c_1. \end{aligned}$$

Renombrando $c = k - c_1$, resulta la solución

$$xy + 2\ln y = c.$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}. \tag{2.37}$$

Solución. Escribamos la ecuación en su forma diferencial,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\begin{aligned} (2y - xe^{xy})dy &= (2 + ye^{xy})dx \\ (2 + ye^{xy})dx - (2y - xe^{xy})dy &= 0 \\ (2 + ye^{xy})dx + (xe^{xy} - 2y)dy &= 0. \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial es exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = xye^{xy} + e^{xy} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

luego, existe una función f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + ye^{xy}.$$

Integrando respecto a x

$$f(x,y) = \int (2 + ye^{xy})dx,$$

es decir

$$f(x,y) = 2x + e^{xy} + \phi(y), \tag{2.38}$$

donde $\phi(y)$ es una función que depende únicamente de y.

Derivamos parcialmente a (2.38) respecto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + \phi'(y),$$

pero sabemos que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, por lo que

$$xe^{xy} + \phi'(y) = xe^{xy} - 2y.$$

De esta ecuación resulta

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= -2y \\ \phi(y) &= -y^2 + c_1, \end{aligned}$$

con c_1 una constante.

Luego, sustituimos $\phi(y)$ en (2.38) y se tiene que

$$f(x,y) = 2x + e^{xy} - y^2 + c_1.$$

Finalmente, tomando en cuenta que $f(x,y) = k$ da la solución implícita, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x + e^{xy} - y^2 + c_1 &= k \\ 2x + e^{xy} - y^2 &= k - c_1 \\ 2x + e^{xy} - y^2 &= c. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Resolver

$$\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)\frac{dx}{dy} = 1 - \ln x. \tag{2.39}$$

Solución. Esta ecuación en su forma diferencial nos queda de la siguiente forma

$$(1 + \ln x + \frac{y}{x})dx + (\ln x - 1)dy = 0,$$

en donde

$$M(x,y) = 1 + \ln x + \frac{y}{x}, \qquad N(x,y) = \ln x - 1$$

y como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Se tiene que nuestra ecuación a resolver es una ecuación diferencial exacta, por lo que existe una función f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \ln x + \frac{y}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x - 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (1 + \ln x + \frac{y}{x})dx \\ f(x,y) &= x + x\ln x - x + y\ln x + \phi(y) \\ f(x,y) &= (x+y)\ln x + \phi(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \ln x + \phi'(y). \end{aligned}$$

Pero $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \ln x - 1$, entonces

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= -1 \\ \phi(y) &= -y + c_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\phi(y)$ se tiene que

$$f(x,y) = (x+y)\ln x - y + c_1.$$

La solución está dada por

$$(x+y)\ln x - y + c_1 = k,$$

de donde

$$\begin{aligned} (x+y)\ln x - y &= c \\ y(\ln x - 1) &= c - x\ln x \\ y &= \frac{c - x\ln x}{\ln x - 1}, \qquad x \neq e. \end{aligned}$$

Nota: Para resolver las ecuaciones exactas anteriores primero integramos con respecto a x en la igualdad $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, pero se puede proceder en forma análoga si en lugar de esto integramos con respecto a y en $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$. Ilustraremos dicho procedimiento en los tres ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4. Resuelva

$$(3y^2 + x\cos xy)\frac{dy}{dx} + (3x^2 + y\cos xy) = 0. \tag{2.40}$$

Solución. Escribamos (2.40) en su forma diferencial

$$(3x^2 + y\cos xy)dx + (3y^2 + x\cos xy)dy = 0.$$

En este caso

$$M(x,y) = 3x^2 + y\cos xy, \qquad N(x,y) = 3y^2 + x\cos xy$$

y dado que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -xy\,\mathrm{sen}\,xy + \cos xy = \frac{\partial N}{\partial x},$$

tenemos que (2.40) es una ecuación diferencial exacta, por lo que existe f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x\cos xy.$$

Integrando esta ecuación respecto a y obtenemos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int (3y^2 + x\cos xy)dy \\ &= y^3 + \operatorname{sen} xy + \phi(x). \end{aligned}$$

Derivando parcialmente con respecto a x resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy + \phi'(x).$$

Recordando que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y\cos xy$ e igualando con la expresión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} y\cos xy + \phi'(x) &= 3x^2 + y\cos xy \\ \phi'(x) &= 3x^2 \\ \phi(x) &= x^3 + c_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo $\phi(x)$ tenemos

$$f(x,y) = y^3 + \operatorname{sen} xy + x^3 + c_1.$$

La solución está dada por

$$y^3 + \operatorname{sen} xy + x^3 + c_1 = k,$$

o bien

$$y^3 + \operatorname{sen} xy + x^3 = c.$$

EJEMPLO 5. Resolver

$$(ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0, \qquad y(0) = 6. \tag{2.41}$$

Solución. Tenemos que

$$M(x,y) = ye^x + 2e^x + y^2, \qquad N(x,y) = e^x + 2xy$$

y como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x + 2y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

se trata de una ecuación diferencial exacta. Buscamos una función f tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x + 2xy \\ f(x,y) &= \int (e^x + 2xy)dy \\ f(x,y) &= e^x y + xy^2 + \phi(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= e^x y + y^2 + \phi'(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, se requiere que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + 2e^x + y^2.$$

Igualando las dos expresiones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= 2e^x \\
\phi(x) &= \int 2e^x dx \\
\phi(x) &= 2e^x + c_1.
\end{aligned}$$

Sustituyendo $\phi(x)$ obtenemos

$$f(x,y) = e^x y + xy^2 + 2e^x + c_1.$$

Luego, la solución viene dada por

$$\begin{aligned}
e^x y + xy^2 + 2e^x + c_1 &= k \\
e^x y + xy^2 + 2e^x &= c.
\end{aligned}$$

Aplicando la condición $y(0) = 6$ en la última ecuación tenemos que

$$\begin{aligned}
e^0(6) + (0)(6)^2 + 2e^0 &= c \\
8 &= c.
\end{aligned}$$

Así, concluimos que nuestra solución particular está definida implícitamente mediante la ecuación

$$e^x y + xy^2 + 2e^x = 8.$$

EJEMPLO 6. Resolver

$$(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x)dx + (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)dy = 0, \qquad y(0) = e. \tag{2.42}$$

Solución. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \cos x - 3x^2 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

tenemos que (2.42) es una ecuación diferencial exacta y por lo tanto existe una función f tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y \\
f(x,y) &= \int (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)dy,
\end{aligned}$$

de donde

$$f(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x - x^3 y + y \ln y - y + \phi(x).$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x - 3x^2 y + \phi'(x).$$

Pero $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, de donde

$$\begin{aligned} y^2 \cos x - 3x^2 y + \phi'(x) &= y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x \\ \phi'(x) &= -2x \\ \phi(x) &= -x^2 + c_1. \end{aligned}$$

Luego

$$f(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x - x^3 y + y \ln y - y - x^2 + c_1$$

o bien, la solución y está definida implícitamente en la ecuación

$$y^2 \operatorname{sen} x - x^3 y + y \ln y - y - x^2 = c.$$

Como y está sujeta a la condición $y(0) = e$, se tiene que

$$\begin{aligned} e^2 \operatorname{sen} 0 - (0)(e) + e \ln e - e - 0 &= c \\ c &= 0. \end{aligned}$$

Así, y está definida implícitamente en la ecuación

$$y^2 \operatorname{sen} x - x^3 y + y \ln y - y - x^2 = 0.$$

EJEMPLO 7. Resolver

$$(2y^2 - 4x + 5)dx + (2y - 4xy - 4)dy = 0. \tag{2.43}$$

Solución. Se tiene que

$$M(x,y) = 2y^2 - 4x + 5, \qquad N(x,y) = 2y - 4xy - 4$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -4y,$$

por lo cual (2.43) no es una ecuación diferencial exacta.

EJERCICIOS 2.3

De las siguientes ecuaciones resuelva aquéllas que sean exactas.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^3y^2 - 3x^2y}{x^3 - 2x^4y}$
2. $(e^{2x}y^2 - 2x)dx + e^{2x}y\,dy = 0$
3. $(y - 3x^2)dx + (x-1)dy = 0$
4. $(x + 3x^3 \operatorname{sen} y)dx + x^4 \cos y\,dy = 0$
5. $\left(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$
6. $y\cos t + 2te^y + (\operatorname{sen} t + t^2e^y + 2)\dfrac{dy}{dt} = 0$
7. $\left(\dfrac{1}{x} + ye^{xy}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y} + xe^{xy}\right)dy = 0 \quad \text{con} \quad y(\tfrac{1}{2}) = 2$
8. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2x\right)dx + \sqrt{1+x^2}dy = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 6$
9. $\left(y - \dfrac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}\right)dx + \left(x + \dfrac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}\right)dy = 0$
10. $e^x\cos y\,dx - xe^x \operatorname{sen} y\,dy = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = \pi$

2.4 Factores Integrantes

Definición 2.4.1 *Si la ecuación diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.44}$$

no es exacta, pero existe una función $\mu(x,y)$*, tal que al multiplicar (2.44) por* $\mu(x,y)$*, la ecuación resultante*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{2.45}$$

es exacta, entonces se dice que $\mu(x,y)$ *es un* **factor integrante** *de la ecuación diferencial (2.44).*

Debemos observar que la solución de (2.45) es la solución de (2.44) y que en general no es fácil encontrar un factor integrante para una ecuación no exacta de la forma (2.44). Sin embargo, si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ cumplen ciertas condiciones entonces los factores integrantes son conocidos. Veamos algunos casos.

CASO I. Factor integrante dependiente de x. Suponga que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

es una función que depende únicamente de x, la cual denotaremos por $g(x)$. Entonces, un factor integrante para la ecuación dada es

$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx}.$$

CASO II. Factor integrante dependiente de y. Si se tiene que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

es una función de y únicamente, denotada por $h(y)$, entonces

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$$

es un factor integrante para la ecuación diferencial (2.44).

CASO III.Factores de integración de la forma $x^m y^n$. Si existen m y n tales que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = m\frac{N}{x} - n\frac{M}{y},$$

entonces

$$\mu(x,y) = x^m y^n$$

es un factor integrante para (2.44).

CASO IV. Si existen funciones $P(x)$ y $Q(y)$ que satisfacen

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N(x,y)P(x) - M(x,y)Q(y)$$

entonces un factor integrante para (2.44) es

$$\mu(x,y) = e^{\int P(x)dx}e^{\int Q(y)dy}.$$

Obsérvese que el Caso IV incluye a los Casos I, II y III si tomamos $Q(y) = 0$, $P(x) = 0$ y $P(x) = \dfrac{m}{x}$, $Q(y) = \dfrac{n}{y}$; respectivamente.

También queremos advertir que al aplicar las fórmulas anteriores estamos interesados en obtener solamente *un* factor integrante, por lo cual después de calcular las integrales indefinidas implicadas en dichas expresiones basta considerar un valor fijo de la constante de integración; *cero* por simplicidad. Continuaremos con esta práctica más adelante, al emplear las fórmulas (2.60), (4.15) y (4.85).

EJEMPLO 1. Resolver

$$(2xy + y^4)dx + (3x^2 + 6xy^3)dy = 0. \tag{2.46}$$

Solución. En este caso

$$M(x, y) = 2xy + y^4, \qquad N(x, y) = 3x^2 + 6xy^3,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 4y^3, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x + 6y^3.$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, tenemos que (2.46) no es una ecuación diferencial exacta. Buscaremos un factor integrante para (2.46) investigando si M y N cumplen con las condiciones mencionadas en el Caso I.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} &= \frac{2x + 4y^3 - 6x - 6y^3}{3x^2 + 6xy^3} \\ &= \frac{-(2y^3 + 4x)}{3x^2 + 6xy^3} \end{aligned} \tag{2.47}$$

La expresión en (2.47) no es una función exclusivamente de x. Por lo que investigaremos si M y N son funciones que cumplen con la condición mencionada en el Caso II.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} &= \frac{6x + 6y^3 - 2x - 4y^3}{2xy + y^4} \\ &= \frac{2(y^3 + 2x)}{y(y^3 + 2x)} \\ &= \frac{2}{y}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

La expresión en (2.48) si es una función exclusivamente de y, luego *un* factor integrante es de la forma

$$e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = e^{\ln y^2} = y^2.$$

Así

$$\mu(y) = y^2.$$

Ya que se conoce un factor integrante de (2.46), multiplicamos dicha ecuación por y^2 y procedemos a resolver la ecuación diferencial resultante, cuya solución es igual a la de (2.46). Tenemos

$$\begin{aligned} y^2(2xy+y^4)dx + y^2(3x^2+6xy^3)dy &= 0 \\ (2xy^3+y^6)dx + (3x^2y^2+6xy^5)dy &= 0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Ahora se tiene en (2.49) que

$$M(x,y) = 2xy^3 + y^6, \qquad N(x,y) = 3x^2y^2 + 6xy^5$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 + 6y^5, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 + 6y^5.$$

Luego, (2.49) ya es una ecuación diferencial exacta, cuya solución está definida implícitamente en la ecuación

$$x^2y^3 + xy^6 = c.$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$\left(\frac{y}{x^2} + 2\right) dx + \frac{1}{x}(1 + \ln xy)\, dy = 0. \tag{2.50}$$

Solución. Tenemos que

$$M(x,y) = \frac{y}{x^2} + 2, \qquad N(x,y) = \frac{1 + \ln xy}{x},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-\ln xy}{x^2}.$$

De modo que (2.50) no es una ecuación diferencial exacta. Veamos si M y N cumplen con la condición del Caso I.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} &= \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{\ln xy}{x^2}}{\frac{1+\ln xy}{x}} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Como (2.51) es exclusivamente función de x, un factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x.$$

Multiplicamos (2.50) por $\mu(x)$ y obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{y}{x} + 2x\right) dx + (1 + \ln xy)dy = 0,$$

la cual es una ecuación diferencial exacta que tiene la misma solución que (2.50), definida implícitamente en la ecuación

$$y \ln xy + x^2 = c.$$

EJEMPLO 3. Resolver

$$(y + x + 2)dx + dy = 0. \tag{2.52}$$

Solución. Ahora

$$M(x, y) = y + x + 2, \qquad N(x, y) = 1,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Entonces (2.52) no es una ecuación exacta. Hallaremos un factor integrante. Primero, veamos si M y N cumplen con las condiciones mencionadas en el Caso I.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = 1. \tag{2.53}$$

Vemos que (2.53) es una función constante y que se puede considerar como función de x o bien de y. En este caso nos interesa considerarla como función únicamente de x. Luego $\mu(x) = e^x$. Multiplicamos a (2.52) por $\mu(x)$ y se obtiene

$$e^x(y + x + 2)dx + e^x dy = 0. \tag{2.54}$$

Se puede observar que (2.54) si es una ecuación exacta, cuya solución es

$$y = ce^{-x} - x - 1.$$

EJEMPLO 4. Resolver

$$(6y - 24xy^5)dx + (9x - 56x^2y^4)dy = 0. \tag{2.55}$$

Solución. Ya que

$$M(x, y) = 6y - 24xy^5, \qquad N(x, y) = 9x - 56x^2y^4,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6 - 120xy^4, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 9 - 112xy^4,$$

es claro que (2.55) no es una ecuación diferencial exacta. Determinemos un factor integrante. El Caso I no puede aplicarse, puesto que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}}{N} = \frac{-3 - 8xy^4}{x(9 - 56xy^4)},$$

no es función exclusivamente de x. Por otra parte

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{3+8xy^4}{6y(1-4xy^4)}$$

no es una función exclusivamente de y, por lo que tampoco podemos aplicar el Caso II. Busquemos un factor integrante de la forma

$$\mu(x,y)=x^m y^n,$$

el cual se puede construir sólo si existen constantes m y n, tales que

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} &= m\frac{N}{x}-n\frac{M}{y}\\ 6-120xy^4-9+112xy^4 &= m\frac{9x-56x^2y^4}{x}-n\frac{6y-24xy^5}{y}\\ -3-8xy^4 &= 9m-56mxy^4-6n+24nxy^4.\end{aligned}$$

Esto nos lleva al sistema

$$\begin{aligned}9m-6n &= -3\\ -56m+24n &= -8,\end{aligned}$$

cuya solución es $m=1$ y $n=2$. De modo que $\mu(x,y)=xy^2$ es un factor integrante para (2.55). Por lo que al resolver la ecuación

$$xy^2(6y-24xy^5)dx+xy^2(9x-56x^2y^4)dy=0,$$

obtenemos la solución de (2.55). Su solución y está definida implícitamente en la ecuación

$$3x^2y^3-8x^3y^7=c.$$

EJEMPLO 5. Resolver

$$(xy+y\ln y)dx+(xy+x\ln x)dy=0. \tag{2.56}$$

Solución. Como

$$M(x,y)=xy+y\ln y, \qquad N(x,y)=xy+x\ln x,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x+\ln y+1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=y+1+\ln x,$$

observamos que $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$. Luego la ecuación no es exacta. Busquemos un factor integrante. Se tiene que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{(x+\ln y)-(y+\ln x)}{x(y+\ln x)},$$

no es función exclusivamente de x, por lo que no podemos calcular un factor integrante dependiente solamente de x. En forma similar vemos que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{y-x+\ln x-\ln y}{xy+y\ln y}$$

no es función exclusivamente de y, por lo que el Caso II no puede aplicarse. Vamos ahora a buscar un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=x^m y^n$. Para ello buscamos constantes m y n tales que

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} &= m\frac{N}{x}-n\frac{M}{y}\\ x+\ln y+1-y-1-\ln x &= m\frac{xy+x\ln x}{x}-n\frac{xy+y\ln y}{y}\\ (x+\ln y)-(y+\ln x) &= m(y+\ln x)-n(x+\ln y).\end{aligned}$$

De la última igualdad se sigue que $m=n=-1$. Así que un factor integrante es

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xy}.$$

Si multiplicamos la ecuación diferencial dada por $\mu(x,y)$, obtenemos la ecuación exacta

$$\frac{1}{xy}(xy+y\ln y)dx+\frac{1}{xy}(xy+x\ln x)dy=0,$$

cuya solución está definida implícitamente por la ecuación

$$y+x+\ln y\ln x=c.$$

EJEMPLO 6. Resolver

$$(2x^2+e^{-y})dx+(x^3+xy)dy=0. \tag{2.57}$$

Solución. La ecuación no es exacta, ya que

$$M(x,y)=2x^2+e^{-y},\qquad N(x,y)=x^3+xy,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-e^{-y},\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+y.$$

Procedemos a determinar un factor integrante. Primero vemos que la ecuación no cae dentro del Caso I, puesto que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-e^{-y}-(3x^2+y)}{x^3+xy},$$

no es función solo de x. Además

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{3x^2+y+e^{-y}}{2x^2+e^{-y}}$$

no es función solo de y, y el Caso II falla. Trataremos ahora de hallar un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=x^m y^n$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} &= m\frac{N}{x}-n\frac{M}{y}\\ -e^{-y}-3x^2-y &= m\frac{x^3+xy}{x}-n\frac{2x^2+e^{-y}}{y}\\ -e^{-y}-3x^2-y &= mx^2+my-2n\frac{x^2}{y}-n\frac{e^{-y}}{y}.\end{aligned}$$

Observamos en la última igualdad, que no existen m, n que la satisfagan. Por último, de acuerdo con el Caso IV, buscamos un factor integrante de la forma

$$\mu(x,y)=e^{\int P(x)dx+\int Q(y)dy}.$$

Es necesario encontrar funciones $P(x)$ y $Q(y)$ tales que

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N(x,y)P(x)-M(x,y)Q(y).$$

Es decir

$$\begin{aligned}-e^{-y}-(3x^2+y) &= (x^3+xy)P(x)-(2x^2+e^{-y})Q(y)\\ -e^{-y}-3x^2-y &= x^3P(x)+xyP(x)-2x^2Q(y)-e^{-y}Q(y)\\ -3x^2-y-e^{-y} &= x^3P(x)-2x^2Q(y)+yxP(x)-Q(y)e^{-y}.\end{aligned}$$

En consecuencia $Q(y)=1, P(x)=-\dfrac{1}{x}$ y un factor integrante es

$$\begin{aligned}\mu(x,y) &= e^{\int\frac{-1}{x}dx}e^{\int dy}\\ &= e^{-\ln x}e^{y}\\ &= \frac{e^y}{x}.\end{aligned}$$

Así que multiplicamos la ecuación (2.57) por este $\mu(x,y)$ y obtenemos

$$\frac{e^y}{x}(2x^2+e^{-y})dx+\frac{e^y}{x}(x^3+xy)dy=0,$$

la cual es una ecuación diferencial exacta, cuya solución es la misma que la de la ecuación original y está definida implícitamente en la ecuación

$$(x^2+y-1)e^y+\ln x=c.$$

EJERCICIOS 2.4

Mediante un factor integrante adecuado resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(2x^2 + y)dx + (x^2 y - x)dy = 0$
2. $(4x^2 + 3\cos y)dx - x \operatorname{sen} y \, dy = 0$
3. $\left(1 + \dfrac{e^y}{x}\right) dx - (x + 3e^y)dy = 0$
4. $\left(2xy^2 + \dfrac{x}{y^2}\right) dx + 4x^2 y \, dy = 0$
5. $y(1 + \ln xy + 2x)dx + (x - 2y^2)dy = 0$
6. $(6x^2y^2 - 4y^4)dx + (2x^3y - 4xy^3)dy = 0$
7. $\left(\dfrac{y}{x} \cos xy + \dfrac{1}{x^2} \operatorname{sen} xy + 3y^3\right) dx + (\cos xy + 3xy^2)dy = 0$
8. $\dfrac{1}{y^2}(1 + \ln xy)dx + \left(\dfrac{x}{y^3} - 3\right) dy = 0$
9. $(x + x^3 \operatorname{sen} 2y)dy - 2y \, dx = 0$
10. $\cos y \, dx + (2x \operatorname{sen} y - \cos^3 y)dy = 0$

2.5 Ecuaciones Diferenciales Lineales

La ecuación diferencial lineal de primer orden, tiene la forma general

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x). \tag{2.58}$$

Dividiendo entre $a_1(x)$, resulta la forma mas útil

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \tag{2.59}$$

Es fácil verificar que la ecuación diferencial (2.59) tiene como factor integrante a la función

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{2.60}$$

Si multiplicamos la ecuación (2.59) por $\mu(x)$, se sigue que

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)] = \mu(x)q(x),$$

e integrando ambos miembros de esta última igualdad, obtenemos la **solución general** de la ecuación.

EJEMPLO 1. Resolver

$$(x+1)\frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^4. \tag{2.61}$$

Solución. La ecuación es lineal. Escribamos primero la ecuación diferencial como

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

Un factor integrante es

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{-\int \frac{2}{x+1}dx} \\ &= e^{\ln(x+1)^{-2}} \\ &= (x+1)^{-2}. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $(x+1)^{-2}$, podemos escribir la ecuación como

$$(x+1)^{-2}\frac{dy}{dx} - 2(x+1)^{-3}y = x+1,$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dx}[(x+1)^{-2}y] = x+1,$$

e integrando

$$(x+1)^{-2}y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + c.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + c(x+1)^2.$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$(2x^2 - ye^x)dx - e^x dy = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{2.62}$$

Solución. La ecuación es lineal. La escribimos en la forma

$$\frac{dy}{dx} + y = 2x^2e^{-x}.$$

Un factor integrante es

$$\mu(x) = e^x.$$

De modo que

$$\begin{aligned} e^x \frac{dy}{dx} + e^x y &= 2x^2 \\ \frac{d}{dx}[e^x y] &= 2x^2 \\ e^x y &= \frac{2}{3}x^3 + c. \end{aligned}$$

La solución general, viene dada por

$$y = (\frac{2}{3}x^3 + c)e^{-x}.$$

La condición inicial $y(0) = 1$ da $c = 1$. Por consiguiente la solución del problema de valor inicial es

$$y = (\frac{2}{3}x^3 + 1)e^{-x}.$$

EJEMPLO 3. Resolver

$$(x \ln x)y' + (1 + \ln x)y + \frac{1}{2}\sqrt{x}(2 + \ln x) = 0. \tag{2.63}$$

Solución. Escribimos la ecuación diferencial en la forma

$$y' + \frac{1 + \ln x}{x \ln x} y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}\, \frac{2 + \ln x}{x \ln x}.$$

Un factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx} = x \ln x.$$

Multiplicamos por $\mu(x) = x \ln x$

$$\begin{aligned} (x \ln x)y' + (1 + \ln x)y &= -\frac{1}{2}\sqrt{x}(2 + \ln x) \\ \frac{d}{dx}[(x \ln x)y] &= -\frac{1}{2}\sqrt{x}(2 + \ln x). \end{aligned}$$

Así que

$$(x \ln x)y = -\frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(4 + 3\ln x) + c.$$

La solución general es

$$y = -\frac{\sqrt{x}}{9 \ln x}(4 + 3\ln x) + \frac{c}{x \ln x}.$$

EJEMPLO 4. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2y}. \tag{2.64}$$

Solución. La ecuación diferencial (2.64) no es separable, ni homogénea, ni exacta, ni lineal en la variable y. Sin embargo considerando los recíprocos, tenemos

$$\frac{dx}{dy} = x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2y,$$

o bien

$$\frac{dx}{dy} - (\operatorname{sen} y)x = 2 \operatorname{sen} 2y.$$

La última ecuación es lineal en x. El factor de integración correspondiente es

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{-\int \operatorname{sen} y \, dy} \\ &= e^{\cos y}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{\cos y}\frac{dx}{dy} - e^{\cos y}(\operatorname{sen} y)x &= 2 \operatorname{sen} 2y \; e^{\cos y} \\ \frac{d}{dy}[e^{\cos y}x] &= 4 \operatorname{sen} y \; \cos y e^{\cos y} \\ e^{\cos y}x &= 4\int \operatorname{sen} y \cos y e^{\cos y} dy \\ e^{\cos y}x &= 4(1 - \cos y)e^{\cos y} + c. \end{aligned}$$

La solución general de (2.64) es

$$x = 4(1 - \cos y) + ce^{-\cos y}.$$

EJERCICIOS 2.5

Diga si la ecuación diferencial dada es lineal en y o en x. En caso de serlo determine su solución general.

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 1$

2. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x+1}{x+1}y = x - 1$

3. $(1 + x^2)dy + (xy + x^3 + x)dx = 0$

4. $xy' = 3y + x^4 \cos x, \qquad y(2\pi) = 0$

5. $ydx + (xy + 2x - ye^y)dy = 0$

6. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y - x}$

7. $xy' + 2y = \operatorname{sen} x$

8. $\operatorname{sen} x\dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0, \qquad y(-\pi/2) = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y - x}$

10. $\cos^2 x\dfrac{dy}{dx} + y - 1 = 0, \qquad y(0) = -3$

2.6 Ecuación de Bernoulli

A una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n \tag{2.65}$$

con n un número real, se le llama **ecuación de Bernoulli**.

Si $n = 0$ o $n = 1$, (2.65) es una ecuación diferencial lineal. Además si $n = 1$, la ecuación se puede resolver mediante separación de variables. Así que nos concentramos en el caso en que $n \neq 0, 1$.

El método para resolver una ecuación de Bernoulli consiste en transformarla en una ecuación diferencial lineal mediante un cambio de variable, veamos.

Dividiendo ambos lados de (2.65) por y^n, resulta

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x). \tag{2.66}$$

Sea

$$w = y^{1-n}, \tag{2.67}$$

entonces

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

por lo cual

$$\frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{2.68}$$

Sustituyendo (2.67) y (2.68) en la ecuación diferencial (2.66) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} + P(x)w &= f(x) \\ \frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w &= (1-n)f(x), \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial lineal.

EJEMPLO 1. Resolver

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2. \tag{2.69}$$

Solución. Dividiendo la ecuación (2.69) por y^2, resulta

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1} = e^x. \tag{2.70}$$

Sea

$$w = y^{-1}, \quad \frac{dw}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}, \quad -\frac{dw}{dx} = y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo en (2.70)

$$\begin{aligned} -\frac{dw}{dx} - w &= e^x \\ \frac{dw}{dx} + w &= -e^x. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación diferencial lineal tenemos

$$w = -\frac{1}{2}e^x + c_1 e^{-x},$$

y recordando que $w = y^{-1}$

$$y^{-1} = \frac{-e^x + 2c_1 e^{-x}}{2},$$

de donde

$$y = \frac{2}{ce^{-x} - e^x}.$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy = 0. \tag{2.71}$$

Solución. Veamos si es una ecuación de Bernoulli.

$$\begin{aligned} y(6y^2 - x - 1)dx + 2xdy &= 0 \\ 6y^3 - xy - y + 2x\frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2x\frac{dy}{dx} - (x+1)y &= -6y^3 \\ \frac{dy}{dx} - \frac{x+1}{2x}y &= -\frac{3}{x}y^3 \end{aligned}$$

Así, efectivamente se trata de una ecuación de Bernoulli. Dividiendo por y^3, se sigue que

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - \frac{x+1}{2x}y^{-2} = -\frac{3}{x}.$$

Sea $w = y^{-2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \\ -\frac{1}{2}\frac{dw}{dx} &= y^{-3}\frac{dy}{dx} \\ -\frac{1}{2}\frac{dw}{dx} - \frac{x+1}{2x}w &= -\frac{3}{x} \\ \frac{dw}{dx} + \frac{x+1}{x}w &= \frac{6}{x}. \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación diferencial lineal se obtiene

$$\begin{aligned} w &= (6 + ce^{-x})x^{-1} \\ y^{-2} &= (6 + ce^{-x})x^{-1} \\ y &= \sqrt{\frac{x}{6 + ce^{-x}}}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3x^2}. \tag{2.72}$$

Solución. Nótese que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x + y^3x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x(1 + y^3x)}, \end{aligned}$$

luego la ecuación (2.72) no es de Bernoulli en la variable y, pero si la escribimos como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^3x^2}{y},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{x}{y} + \frac{y^3}{y}x^2 \\ \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x &= y^2x^2, \end{aligned}$$

la cual es una ecuación diferencial de Bernoulli en x. Dividiendo por x^2, resulta

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^{-1} = y^2. \tag{2.73}$$

Sea $w = x^{-1}$, entonces $\frac{dw}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy}$. Sustituyendo en (2.73) resulta

$$-\frac{dw}{dy} - \frac{1}{y}w = y^2,$$

y resolviendo la ecuación diferencial lineal en w obtenemos

$$w = \frac{-y^4 + c}{4y}.$$

Ya que $w = x^{-1}$, se tiene

$$x^{-1} = \frac{-y^4 + c}{4y},$$

de donde

$$x = \frac{4y}{c - y^4}.$$

EJERCICIOS 2.6

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

1. $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$
2. $2x^2 + 2xyy' = x^2 + y^2$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$
4. $xy' + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}}$
5. $y^2y' + 2xy^3 = 6x$
6. $y^2dx + (2xy - 5x^3)dy = 0$
7. $(1 - x^2)y' - xy = 7xy^2$
8. $y^3y' + 4xy^4 = 8x$
9. $(y\ln x - 2)ydx = xdy$
10. $y'(x^2y^3 + xy) = 1$

2.7 Miscelánea de Ecuaciones Diferenciales

No existe un método general para resolver ecuaciones diferenciales. Por consiguiente, para resolver una ecuación diferencial recomendamos primero investigar si es de alguno de los tipos estudiados en las secciones anteriores: separable, homogénea, exacta, con un factor integrante, lineal, etcétera, y posteriormente aplicar el método de solución correspondiente.

Algunas ecuaciones diferenciales pueden resolverse por varios de los métodos vistos en las secciones anteriores.

EJEMPLO. Resolver

$$(2x + xy^2)dx + (4y + x^2y)dy = 0. \tag{2.74}$$

Solución. Veamos primero si la ecuación (2.74) es de variables separables.

$$\begin{aligned} (4y + x^2y)dy &= -(2x + xy^2)dx \\ y(4 + x^2)dy &= -x(2 + y^2)dx \\ \frac{y}{2 + y^2}dy &= \frac{-x}{4 + x^2}dx. \end{aligned}$$

Así, (2.74) resultó de variables separables. Integrando y reduciendo, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln(2 + y^2) &= -\ln(4 + x^2) + c_1 \\ \ln(2 + y^2)(4 + x^2) &= c_1 \\ (2 + y^2)(4 + x^2) &= c_2 \\ 8 + 2x^2 + 4y^2 + x^2y^2 &= c_2. \end{aligned}$$

Por otra parte, si en (2.74) denotamos

$$M(x, y) = 2x + xy^2 \qquad N(x, y) = 4y + x^2y,$$

entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2yx.$$

Por lo tanto, la ecuación (2.74) también es exacta. Luego, existe una función f tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$. A partir de estas relaciones encontramos que

$$\begin{aligned} f(x, y) = \int (2x + xy^2)dx &= x^2 + \frac{x^2y^2}{2} + h(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + h'(y) &= 4y + yx^2 \\ h'(y) &= 4y \\ h(y) &= 2y^2 + c_1. \end{aligned}$$

De donde

$$f(x,y) = x^2 + \frac{x^2y^2}{2} + 2y^2 + c_1.$$

La solución está dada por $f(x,y) = c_2$, con c_2 una constante, o equivalentemente

$$2x^2 + x^2y^2 + 4y^2 = c.$$

Finalmente investiguemos si la ecuación (2.74) es lineal. Tenemos

$$\begin{aligned}
(4y + x^2y)dy + (2x + xy^2)dx &= 0 \\
(4y + x^2y)\frac{dy}{dx} + 2x + xy^2 &= 0 \\
(4y + x^2y)\frac{dy}{dx} + xy^2 &= -2x \\
\frac{dy}{dx} + \frac{x}{(4y + x^2y)}y^2 &= \frac{-2x}{4y + yx^2} \\
\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y(4 + x^2)}y^2 &= \frac{-2x}{y(4 + x^2)} \\
\frac{dy}{dx} + \frac{x}{4 + x^2}y &= \frac{-2x}{(4 + x^2)}y^{-1}.
\end{aligned}$$

De aquí, es claro que no es lineal, pero sí es de Bernoulli. Resolviéndola como tal, encontramos

$$\begin{aligned}
y\frac{dy}{dx} + \frac{x}{4 + x^2}y^2 &= \frac{-2x}{4 + x^2} \\
\text{si} \quad w = y^2; \quad \frac{dw}{dx} &= 2y\frac{dy}{dx} \\
\frac{1}{2}\frac{dw}{dx} + \frac{x}{4 + x^2}w &= \frac{-2x}{4 + x^2} \\
\frac{dw}{dx} + \frac{2x}{4 + x^2}w &= \frac{-4x}{4 + x^2} \\
\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{4+x^2}dx} &= e^{\ln(4+x^2)} = 4 + x^2 \\
(4 + x^2)\frac{dw}{dx} + 2xw &= -4x \\
\frac{d(4 + x^2)}{dx}w &= -4x \\
(4 + x^2)w &= -2x^2 + c \\
(4 + x^2)y^2 &= -2x^2 + c \\
4y^2 + x^2y^2 + 2x^2 &= c.
\end{aligned}$$

En conclusión, la ecuación (2.74) se pudo resolver por tres métodos distintos y por supuesto el lector desarrollará su propia estrategia al resolver una ecuación diferencial.

EJERCICIOS 2.7

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x+y-6}{y-x+1}$

2. $(e^{-5y}+1)\cos 2x dx + (1+\operatorname{sen} 2x)dy = 0$

3. $y' = -\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{x^2y^2}$

4. $y' + \dfrac{e^y \cos x}{e^y \operatorname{sen} x + y^6} = 0$

5. $(1+x^2)y' = xy + x^2y^2$

6. $(\operatorname{sen} y - 2ye^{-x}\operatorname{sen} x)dx + (\cos y + 2e^{-x}\cos x)dy = 0$

7. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$

8. $x^2\dfrac{dy}{dx} + xy - \dfrac{1}{x} = 0 \quad \text{con} \quad y(1) = 1$

9. $xy' + 2y - e^x + \ln x = 0$

10. $(4y+2x-5)dx + (6y+4x-1)dy = 0$

11. $\left(y + x\cot\dfrac{y}{x}\right)dx - xdy = 0$

12. $\operatorname{sen} x(e^{-y}+1)dx = (1+\cos x)dy \quad \text{con} \quad y(0) = 0$

13. $(x\cos y - y\operatorname{sen} y)dy + (x\operatorname{sen} y + y\cos y)dx = 0$

14. $2x^2dy - (y^2 + 2xy - x^2)dx = 0$

15. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y})dy = 0$

16. $(x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2)dx = xydy$

17. $(e^x+1)\dfrac{dy}{dx} = y - ye^x$

18. $xdy - (2y + x^3\operatorname{sen} 3x)dx = 0$

19. $y' = \dfrac{1}{2x-3y}$

20. $\dfrac{dr}{d\theta} = e^\theta - 3r \quad \text{con} \quad r(0) = 1$

21. $(x + ye^{\frac{y}{x}})dx - xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$

22. $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$

23. $\dfrac{dy}{dx} + x + y + 1 = (x + y)^2 e^{3x}$

24. $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

25. $dx + (\dfrac{x}{y} - \operatorname{sen} y)dy = 0$

26. $(y^2 + 3xy)dx = (4x^2 + xy)dy$

27. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \sqrt{y + 3x - 2}$

28. $x^2 dx + (1 - x^3 y)dy = 0$

29. $y + x(\ln x - \ln y - 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$

30. $(6x^2 y + 12xy + y^2)dx + (6x^2 + 2y)dy = 0$

31. $(x^2 + xy + 3y^2)dx - (x^2 + 2xy)dy = 0$

32. $(y \ln y + ye^x)dx + (x + y \cos y)dy = 0$

33. $y^2(xy' + y)(1 + x^4)^{\frac{1}{2}} = x$

34. $x^2 y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2$

35. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - xy^{-2}$

36. $(2xy + 3y^2)dx = (2xy + x^2)dy$

37. $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$

38. $xy' - y - x^2 \cos x = 0, \quad \text{con} \quad y(\pi) = 1$

39. $(2x + \tan y)dx + (x - x^2 \tan y)dy = 0$

40. $y^2 dx + (xy - x^3)dy = 0$

41. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy^2 + y}{x - 2y^3}$

42. $xydx - x^2 dy = y\sqrt{x^2 + y^2}dy$

43. $xy(1+xy^2)\dfrac{dy}{dx}=1$

44. $(y+3x^2y+x^2)dx+(x+x^3)dy=0$

45. $x\dfrac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$

46. $(2x+2xy^2)dx+(x^2y+2y+3y^3)dy=0$

47. $(\cos x\cos y+\operatorname{sen} x)dx-\cos x\tan y dy=0$

48. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-3}{2x-y+1}$

49. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$

50. $(xy^2-y^2+x-1)dx+(x^2y-2xy+x^2+2y-2x+2)dy=0$

51. $\dfrac{dv}{ds}=\dfrac{v+1}{\sqrt{s}+\sqrt{sv}}$

52. $\cos y\operatorname{sen} t\dfrac{dy}{dt}=\operatorname{sen} y\cos t$

53. $\dfrac{dy}{dt}=e^{t+y+3}$

54. $x\cos x dx+(1-6y^5)dy=0 \quad \text{con} \quad y(\pi)=0$

55. $\dfrac{ydx+xdy}{1-x^2y^2}+xdx=0$

56. $\dfrac{4y^2-2x^2}{4xy^2-x^3}dx+\dfrac{8y^2-x^2}{4y^3-x^2y}dy=0$

57. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+2}{x+y-4}$

58. $(4y-x^2)dx-xdy=0 \quad \text{con} \quad y(1)=0$

59. $(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+y)dx+(x-\dfrac{1}{2y^{\frac{3}{2}}})dy=0 \quad \text{con} \quad y(9)=1$

60. $3xy'-2y=x^3y^{-2}$

61. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$

62. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$

63. $(3xy^2 - x^3)\dfrac{dy}{dx} = 3y^3 - x^2y$

64. $3x^2y^2dx + (2x^3y + x^3y)dy = 0$

65. $xy^2y' + y^3 = x\cos x$

66. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xye^{(\frac{x}{y})^2}}{y^2 + y^2e^{(\frac{x}{y})^2} + 2x^2e^{(\frac{x}{y})^2}}$

67. $\left(xy\cos\dfrac{y}{x} + x^2\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}\right)y' = y^2\cos\dfrac{y}{x} \quad \text{con} \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

68. $(x + 2xy^3)dx + (1 + 3x^2y^2 + y)dy = 0$

69. $y' - \dfrac{3}{x}y = x^4y^{\frac{1}{3}}$

70. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2\sqrt{16 + y^2}}{y}$

71. $(y + x^3y^3)dx + xdy = 0$

72. $xe^{x^2}dx + (y^5 - 1)dy = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 0$

73. Encuentre el valor de n para el cual ecuación: $(x + ye^{2xy})dx + nxe^{2xy}dy = 0$, es exacta y resuélvala para ese valor de n.

74. Resuelva: $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1 + x^2}} + 2x\right)dx + \sqrt{1 + x^2}dy = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 6.$

75. Resuelva: $3x^2(1 + \log y)dx + \left(\dfrac{x^3}{y} - 2y\right)dy = 0.$

76. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(-3y + 2x^3y^3)dx + (4x - 3x^4y^2)dy = 0$$

(sugerencia: $\mu = x^my^n$ es un factor integrante de la ecuación.)

77. Una curva parte desde el origen por el primer cuadrante. El área bajo la curva desde $(0,0)$ hasta (x,y) es un tercio del área del rectángulo que tiene a esos puntos como vértices opuestos. Hallar la ecuación de esa curva.

78. Sea t la tangente a una curva C en un punto P. Sea F el punto sobre el eje x tal que FP es perpendicular al eje x y sea T el punto de intersección de t y el eje x. Encontrar la ecuación de la familia de curvas C las cuales tienen la propiedad de que la longitud TF es igual a la suma de la abscisa y de la ordenada de P.

79. Sea t la tangente a una curva C en un punto P. Encontrar la ecuación de la familia de curvas C las cuales tienen la propiedad de que la distancia del origen a t es igual a la abscisa de P.

80. Sea t la tangente a una curva C en el punto P y sea F el punto del eje x tal que PF es perpendicular a dicho eje. Encontrar la ecuación de la familia de curvas C las cuales tienen la propiedad de que la distancia de F a t es constante.

2.8 Cambios de Variables Diversos

El cambio de variable es una idea genérica en Matemáticas, la cual como se ha visto en las secciónes anteriores, también puede aplicarse al tratar de encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, deseamos enfatizar que **no** hay un método general para proponer cambios de variable. Veamos algunos ejemplos adicionales.

EJEMPLO 1. Resolver

$$xe^{2y}\frac{dy}{dx} + e^{2y} = \frac{\ln x}{x}. \tag{2.75}$$

Solución. Sea $u = e^{2y}$. Entonces

$$\frac{du}{dx} = e^{2y}2\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{1}{2}\frac{du}{dx} = e^{2y}\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo en (2.75)

$$\frac{1}{2}x\frac{du}{dx} + u = \frac{\ln x}{x}.$$

Así, la ecuación se ha transformado en la ecuación diferencial lineal

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 2\frac{\ln x}{x^2},$$

cuya solución es

$$u = \frac{2}{x^2}(x\ln x - x) + \frac{c}{x^2}.$$

Usando que $u = e^{2y}$, encontramos la solución de la ecuación original en la forma

$$\begin{aligned}
e^{2y} &= \frac{2}{x}(\ln x - 1) + \frac{c}{x^2} \\
2y &= \ln\left[\frac{2}{x}(\ln x - 1) + \frac{c}{x^2}\right] \\
y &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{2}{x}(\ln x - 1) + \frac{c}{x^2}\right].
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Resolver
$$y' + y\ln y = ye^x. \tag{2.76}$$

Solución. Sea $u = \ln y$. Tenemos que
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx},$$
y como $y = e^u$
$$e^u\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$
Sustituyendo en (2.76) resulta
$$\begin{aligned} e^u\frac{du}{dx} + e^u u &= e^u e^x \\ \frac{du}{dx} + u &= e^x. \end{aligned}$$

Luego, hemos obtenido una ecuación diferencial lineal con solución
$$u(x) = \frac{1}{2}e^x + ce^{-x}.$$
Por lo tanto
$$\ln y = \frac{1}{2}e^x + ce^{-x},$$
de donde
$$y = e^{\frac{1}{2}e^x + ce^{-x}}.$$

EJEMPLO 3. Resolver
$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}. \tag{2.77}$$

Solución. Sea $u = y - 2x + 3$. Entonces
$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{dy}{dx} - 2 \\ \frac{du}{dx} + 2 &= \frac{dy}{dx} \\ \frac{du}{dx} + 2 &= 2 + \sqrt{u} \\ \frac{du}{dx} &= \sqrt{u}. \end{aligned}$$
Note que la ecuación diferencial que acabamos de obtener es separable. Resolviéndola llegamos a que
$$u = \left(\frac{x}{2} + c\right)^2$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} y - 2x + 3 &= \left(\frac{x}{2} + c\right)^2 \\ y &= 2x - 3 + \left(\frac{x}{2} + c\right)^2 . \end{aligned}$$

EJERCICIOS 2.8

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x+y)$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$
3. $\dfrac{dy}{dx} + x + y + 1 = (x+y)^2 e^{3x}$
4. $y' + 1 = e^{-(x+y)} \operatorname{sen} x$
5. $y' = (x+y)^2$
6. $y' = \operatorname{sen}^2(x - y + 1)$
7. Haciendo el cambio de variable $z = y/x^n$, esto es, $y = zx^n$ y escogiendo un valor adecuado de n, demuestre que las ecuaciones diferenciales siguientes pueden transformarse en ecuaciones de variables separables y resuélvalas:

   a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - xy^2}{x + x^2 y}$

   b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{x^3}{y} + x \tan \dfrac{y}{x^2}$

8. Resuelva

   a) $xy'' + 2y' = 0$

   b) $xy'' + 2y' = x$

   (*Sugerencia:* haga $v = y'$)

9. Resolver las ecuaciones

   a) $yy'' + (y')^2 - 1 = 0$

   b) $yy'' - (y')^2 - y^2 = 0$

2.9 Ecuación de Ricatti

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{2.78}$$

se llama **ecuación de Ricatti**. El método de solución que proponemos para resolver (2.78) supone que se conoce, o bien puede calcularse, una solución particular de la ecuación. Sea y_1 una solución particular de (2.78), entonces es fácil mostrar que la relación

$$y = y_1 + \frac{1}{v}, \tag{2.79}$$

define una familia de soluciones de la ecuación de Ricatti, donde v satisface cierta ecuación diferencial lineal, como veremos a continuación.

Derivando (2.79) con respecto a x obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx}.$$

Sustituyendo esta expresión junto con (2.79) en (2.78) tenemos

$$y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx} = p(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2 + q(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + r(x),$$

o equivalentemente

$$y_1' - v^{-2}\frac{dv}{dx} = p(x)y_1^2 + 2\frac{p(x)y_1}{v} + \frac{p(x)}{v^2} + q(x)y_1 + \frac{q(x)}{v} + r(x). \tag{2.80}$$

Ahora bien, ya que que y_1 es solución de la ecuación diferencial, se cumple que

$$y_1'(x) = p(x)y_1^2(x) + q(x)y_1(x) + r(x),$$

lo cual reduce (2.80) a

$$\begin{aligned} -v^{-2}\frac{dv}{dx} &= \frac{2p(x)y_1}{v} + \frac{p(x)}{v^2} + \frac{q(x)}{v} \\ \frac{dv}{dx} &= -[2p(x)y_1v + p(x) + q(x)v] \\ \frac{dv}{dx} &= -[2p(x)y_1 + q(x)]v - p(x). \end{aligned}$$

Es decir, v satisface la ecuación

$$\frac{dv}{dx} + [2p(x)y_1 + q(x)]v(x) = -p(x), \tag{2.81}$$

que efectivamente es una ecuación diferencial lineal.

EJEMPLO . Resolver

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}. \tag{2.82}$$

Solución. Es claro que (2.82) es una Ecuación de Ricatti con $p(x) = 1$, $q(x) = -1/x$, $r(x) = -1/x^2$. Observando que $y_1 = 1/x$ es una solución particular de (2.82), en este caso la ecuación (2.81) para v toma la forma

$$\frac{dv}{dx} + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right) v = -1,$$

esto es

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = -1. \tag{2.83}$$

Un factor integrante de (2.83) es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x.$$

Multiplicando (2.83) por $\mu(x)$ y resolviendo igual que antes, encontramos que

$$\begin{aligned} x\frac{dv}{dx} + v &= -x \\ \frac{d}{dx}(xv) &= -x \\ xv &= -\frac{x^2}{2} + c_1 \\ v &= -\frac{x}{2} + \frac{c_1}{x} = \frac{c - x^2}{2x}, \end{aligned}$$

donde $c = 2c_1$. Por lo tanto, de acuerdo con (2.79)

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{c - x^2}$$

es una familia de soluciones de la ecuación diferencial (2.82).

EJERCICIOS 2.9

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de Ricatti, utilizando la solución particular y_1 indicada.

1. $\dfrac{dy}{dx} = -y^2 + xy + 1, \qquad y_1 = x$

2. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 - 2e^x)y + y^2, \qquad y_1 = e^x$

3. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}y + y^2, \qquad y_1 = \dfrac{2}{x}$

2.10 Ecuación de Clairaut

La ecuación diferencial de la forma

$$y = xy' + f(y'), \tag{2.84}$$

con f una función arbitraria, se llama **ecuación de Clairaut**.

Mostraremos que las rectas

$$y = cx + f(c), \tag{2.85}$$

con c un número real, constituyen una familia de soluciones de la ecuación de Clairaut y que además dicha ecuación posee la siguiente solución definida en forma paramétrica por las ecuaciones

$$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t). \tag{2.86}$$

En primer lugar, derivando (2.85) con respecto a x se sigue que

$$y' = c$$

y sustituyendo en (2.84) vemos que ésta se reduce a la identidad

$$cx + f(c) = xc + f(c),$$

lo cual muestra que (2.85) es una solución de (2.84) para todo c. Obsérvese que la expresión (2.85) de esta familia de soluciones se obtiene trivialmente poniendo $y' = c$ en el lado derecho de (2.84).

Por otra parte, de las ecuaciones (2.86) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -f''(t) \\
\frac{dy}{dt} &= f'(t) - f'(t) - tf''(t) = -tf''(t) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -tf''(t)\left(\frac{1}{-f''(t)}\right) = t.
\end{aligned}$$

Sustituyendo y y $\dfrac{dy}{dx}$ en la ecuación diferencial de Clairaut llegamos a la identidad

$$f(t) - tf'(t) = -f'(t)t + f(t).$$

De modo que efectivamente (2.86) definen otra solución de (2.84).

A la solución paramétrica se le llama **solución singular** y requiere que $f''(t) \neq 0$. Note además que esta solución no se puede obtener de la familia de rectas (2.85).

EJEMPLO. Resolver

$$y = xy' + 1 - \ln y'. \tag{2.87}$$

Solución. La familia de soluciones es

$$y = cx + 1 - \ln c.$$

Identificando $f(y') = 1 - \ln y'$, la solución singular está dada por

$$\begin{aligned} x &= -f'(t) \\ y &= f(t) - tf'(t) \end{aligned}$$

y como

$$f(t) = 1 - \ln t; \qquad f'(t) = -\frac{1}{t},$$

resulta

$$\begin{aligned} x &= -\left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} \\ y &= 1 - \ln t - t\left(-\frac{1}{t}\right) = 2 - \ln t = 2 - \ln\frac{1}{x} \end{aligned}$$

de donde, $y = 2 + \ln x$ es la solución singular.

EJERCICIOS 2.10

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y = xy' - (y')^3$
2. $y = xy' - \tan y'$
3. $y - xy' = \ln y'$
4. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + (x+a)y' - y = 0$; con a una constante.

Capítulo 3

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

3.1 Trayectorias Ortogonales

Se dice que dos curvas son **ortogonales** si se intersectan y en los puntos de corte sus rectas tangentes son perpendiculares entre sí.

Si *todas* las curvas de una familia de curvas $F(x, y, c_1) = 0$ son ortogonales a *todas* las curvas de otra familia $G(x, y, c_2) = 0$, entonces se dice que las familias son, cada una, **trayectorias ortogonales** de la otra.

Una aplicación elemental de las trayectorias ortogonales es la siguiente. Se tiene un imán y se han esparcido limaduras de hierro alrededor de él. Ver figura 3.1. Las

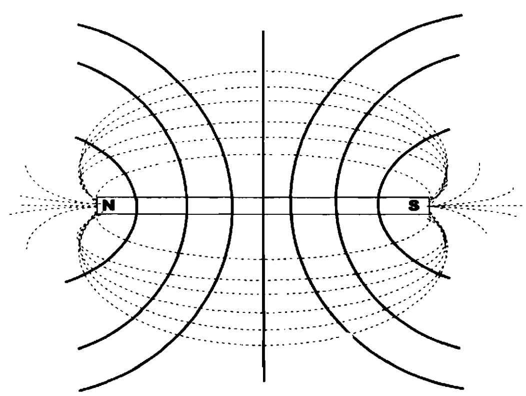


Figura 3.1: Líneas equipotenciales.

líneas punteadas (las limaduras) son las líneas de fuerza. Las líneas continuas son las trayectorias ortogonales y se llaman líneas equipotenciales (líneas de igual potencial).

EJEMPLO 1. Encontrar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y = cx^2$.

Solución. De la ecuación de la familia dada $y = cx^2$ se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = 2cx.$$

Sustituyendo

$$c = \frac{y}{x^2},$$

obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Luego, las trayectorias ortogonales deben cumplir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}.$$

Resolviendo la ecuación diferencial encontramos

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + c_2.$$

Así, las trayectorias ortogonales de las parábolas con vértice en el origen y cuyo eje es el eje y, son elipses con centro en el origen y eje mayor en el eje x.

EJEMPLO 2. Determine el miembro de la familia de trayectorias ortogonales de

$$3xy^2 = 2 + 3c_1x,$$

que pasa por $(0, 4)$.

Solución. Se tiene que

$$3c_1 = \frac{3xy^2 - 2}{x}.$$

Derivando esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x[3x(2yy') + 3y^2] - (3xy^2 - 2)}{x^2} \\ 0 &= \frac{6x^2yy' + 3xy^2 - 3xy^2 + 2}{x^2}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 6x^2y\frac{dy}{dx} + 2 &= 0 \\ 3x^2y\frac{dy}{dx} &= -1 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{3x^2y}. \end{aligned}$$

Luego, la familia de trayectorías ortogonales debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y.$$

La solución general de dicha ecuación es

$$y = ce^{x^3}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, de la condición inicial $y(0) = 4$ resulta $c = 4$. Por lo tanto la curva buscada es

$$y = 4e^{x^3}.$$

3.2 Mecánica

EJEMPLO 1. Al abrir su paracaidas un paracaidista está cayendo con una velocidad de 176 ft/s, si la fuerza de resistencia del aire es $Wv^2/256$ lb, donde W es el peso total del hombre y del parcaidas y v la velocidad con que va cayendo, hallar la velocidad en cualquier tiempo después de abierto el paracaidas.

Solución. El diagrama de cuerpo libre es

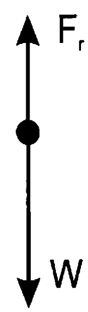


Figura 3.2: Diagrama de cuerpo libre

De la segunda ley de Newton, usando que $W = mg$ y $g = 32$ ft/s^2, se sigue que

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_{total} \\ &= W - F_r \\ &= W - \frac{Wv^2}{256} \\ &= \frac{(256 - v^2)mg}{256} \\ &= \frac{32m(256 - v^2)}{256} \\ &= \frac{m(256 - v^2)}{8}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\frac{dv}{dt} = \frac{256 - v^2}{8}. \tag{3.1}$$

La ecuación diferencial (3.1) es separable, resolviéndola y usando la condición inicial $v(0) = 176$, obtenemos

$$v(t) = 16\frac{6 + 5e^{-4t}}{6 - 5e^{-4t}},$$

de donde se observa que para t muy grande $v(t)$ tiende al valor de 16 ft/s. Esta es la llamada *velocidad terminal* y es la velocidad con que el cuerpo llega al suelo.

EJEMPLO 2. Pensar en un viaje interplanetario antes de mediados del siglo XX era ubicarse en el terreno de la ficción, pero hoy es una realidad. Consideremos un viaje a la Luna. ¿Con qué velocidad debe salir una nave de la Tierra para poder llegar a la Luna?

Solución. La figura ?? ilustra la situación.

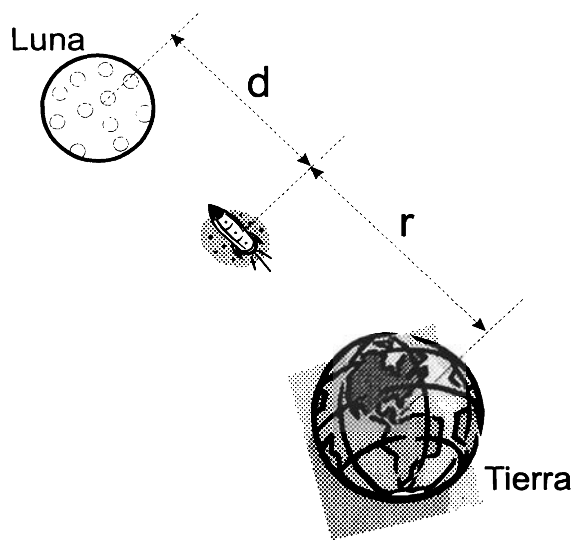


Figura 3.3: Viaje a la Luna.

Denotamos por M_T, M_L, m, r y d a la masa de la Tierra, la masa de la Luna, la masa de la nave, la distancia del centro de la Tierra a la nave, y la distancia de la Luna a la nave, respectivamente. Véase la figura 3.3.

De la ley de la gravitación universal de Newton tenemos que sobre la nave actuan dos fuerzas

$$F_1 = \frac{GM_Tm}{r^2} \quad \text{y} \quad \mathrm{F_2} = \frac{\mathrm{GM_Lm}}{\mathrm{d^2}}.$$

Si ignoramos la influencia de la Luna y demás planetas distintos a la Tierra, así como otras fuerzas de resistencia entonces

$$ma = \frac{-GM_Tm}{r^2},$$

es decir

$$a = \frac{-K}{r^2},$$

con $K = GM_T$ una constante positiva. El valor de K puede expresarse en términos de R y g como sigue. Cuando $r = R$, $a = -g$ de donde $-g = -K/R^2$ y $K = gR^2$.

Así

$$a = -g\frac{R^2}{r^2}.$$

Por otra parte

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v.$$

En consecuencia

$$-g\frac{R^2}{r^2} = v\frac{dv}{dr}. \tag{3.2}$$

Resolviendo la ecuación diferencial (3.2) mediante separación de variables obtenemos

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + c.$$

Ahora, si $v = v_0$ para $r = R$ entonces

$$v_0^2 = 2gR + c,$$

de donde

$$c = v_0^2 - 2gR$$

y

$$v^2 = 2g\frac{R^2}{r} + v_0^2 - 2gR.$$

Note que si $v_0^2 - 2gR < 0$ entonces existe un valor de r tal que v será igual a cero, lo cual implicaría que la velocidad v cambiaría de positiva a negativa y la nave volvería a la Tierra.

Por lo tanto, para que la nave escape de la Tierra debemos pedir que

$$v_0^2 - 2gR \geq 0,$$

o equivalentemente

$$v_0 \geq \sqrt{2gR}.$$

De aquí que la velocidad mínima llamada *velocidad de escape* es

$$v_e = \sqrt{2gR}.$$

Tomando en cuenta que $R = 3960$ millas y $g = 6.09 \times 10^{-3}$ millas/s^2, encontramos

$$v_e = 6.95\ \frac{\text{millas}}{\text{s}} = 11.1\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

3.3 Aplicaciones a problemas relacionados con crecimiento y decrecimiento

3.3.1 Desintegración Radiactiva.

Ley de desintegración radiactiva. La velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva en un instante dado es proporcional a la cantidad de sustancia presente en ese instante.

La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los átomos de una cantidad inicial de dicha sustancia.

EJEMPLO 1. La velocidad con que se desintegran núcleos radiactivos es proporcional al número de núcleos que están presentes en una muestra dada. La mitad del número original de núcleos radiactivos ha experimentado la desintegración en un período de 1500 años.
a)¿Qué porcentaje de núcleos radiactivos originales continuarán después de 4500 años?
b)¿En cuántos años quedará solamente un décimo del número original de núcleos radiactivos?

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de núcleos radiactivos presente después de t años y sea x_0 el número original de núcleos radiactivos. Entonces $x(0) = x_0$, $x(1500) = \dfrac{x_0}{2}$ y $\dfrac{dx}{dt}$ es la velocidad con la que se desintegran los núcleos al tiempo t.

Así , este problema queda formulado por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \tag{3.3}$$

dónde k es la constante de proporcionalidad, junto con las condiciones

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(1500) &= \frac{x_0}{2}. \end{aligned}$$

La solución de la ecuación (3.3) es ya conocida

$$x(t) = ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial $x(0) = x_0$ encontramos que

$$x(t) = x_0 e^{kt}. \tag{3.4}$$

a) Para calcular el porcentaje de núcleos radiactivos originales después de 4500 años, determinamos $x(4500)$. Considerando que $x(1500) = x_0/2$ obtenemos

$$x_0 e^{1500k} = \frac{x_0}{2}$$

$$\begin{aligned} e^{1500k} &= \frac{1}{2} \\ k &= \frac{\ln 0.5}{1500} \\ k &= -0.00046209812. \end{aligned}$$

Sustituyendo k en (3.4) resulta

$$x(t) = x_0 e^{-0.00046209812t}.$$

Luego

$$\begin{aligned} x(4500) &= x_0 e^{(-0.00046209812)(4500)} \\ &= 0.125 x_0, \end{aligned}$$

lo cual nos dice que después de 4500 tenemos un 12.5% de x_0.
b) Para determinar en cuántos años quedará solamente un décimo del número original de núcleos, es necesario hallar el valor de t tal que $x(t) = x_0/10$, es decir

$$\begin{aligned} x_0 e^{kt} &= \frac{x_0}{10} \\ e^{kt} &= \frac{1}{10} \\ t &= \frac{\ln 0.1}{k} \\ t &= 4982.89 \approx 4983 \quad \text{años.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Se sabe que cierto material radiactivo se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 50 miligramos de material y después de dos horas se observa que el material ha perdido el 10% de su masa original, encuentre
a) Una expresión para la masa de material restante en un momento t.
b)¿Cuántos miligramos del material quedan después de cuatro horas?
c) ¿Cuál es la vida media de este material?

Solución. Sea $x(t)$ la masa del material restante después de cierto tiempo t. Como al cabo de dos horas el material se ha desintegrado el 10% de su masa original, es decir el 10% de 50 mg que son 5 mg, tenemos que $x(2) = 45$ mg. Igual que antes, $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad con que se desintegra el material radiactivo.

Así este problema queda formulado con la siguiente ecuación diferencial y sus condiciones

$$\frac{dx}{dt} = kx, \tag{3.5}$$

con k una constante de proporcionalidad, y las condiciones

$$x(0) = 50, \tag{3.6}$$

$$x(2) = 45. \tag{3.7}$$

Sabemos que la solución general de (3.5) es

$$x(t) = ce^{kt}.$$

Empleando la condición inicial (3.6), resulta

$$ce^0 = 50,$$

por lo cual

$$c = 50$$

y

$$x(t) = 50e^{kt}.$$

Por otra parte, de (3.7) tenemos que

$$\begin{aligned} 50e^{2k} &= 45 \\ 2k &= \ln\frac{45}{50} \\ k &= \frac{1}{2}\ln\frac{45}{50} \\ k &= -0.053. \end{aligned}$$

a) Con esto podemos afirmar que una expresión para la masa del material restante después de t horas es

$$x(t) = 50e^{-0.053t}.$$

b) El número de miligramos del material después de cuatro 4 horas es

$$x(4) = 50e^{(-0.053)(4)} = 40.5 \text{ mg}.$$

c) Para calcular la vida media, determinamos el valor de t para el cual $x(t) = \frac{x_0}{2} = 25$. Es decir,

$$\begin{aligned} 50e^{-0.053t} &= 25 \\ -0.053t &= \ln\frac{1}{2} \\ t &= 13 \quad \text{horas}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la vida media de este material es de 13 horas.

Método del Carbono 14 Este método se debe al químico Willard Libby cuyo descubrimiento le valió el Premio Nobel de Química en 1960. La teoría se basa en lo siguiente. La atmósfera terrestre es continuamente bombardeada por rayos cósmicos, los cuales producen neutrones libres que se combinan con el nitrógeno de la atmósfera para producir el isótopo C-14 (Carbono 14 o bien radiocarbono). Este C-14 se combina con el bióxido de carbono presente en la atmósfera, el cual es absorbido por las plantas y éstas a su vez son alimento para los animales. Así es como se incorpora el radiocarbono a los tejidos de seres vivos.

El cociente de la cantidad de C-14 y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atmósfera es constante, y en consecuencia la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la velocidad de incorporación de radiocarbono a él se hace nula y entonces comienza el proceso de desintegración radiactiva del C-14, que se encontraba presente en el momento de su muerte. Así comparando la proporción de C-14 que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad.

EJEMPLO 3. Se ha encontrado que un hueso antiguo contiene $\frac{1}{8}$ de la cantidad original de C-14 de un hueso al tiempo actual. ¿Cuál es la antigüedad del fósil?

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de C-14 presente en el hueso al tiempo t y sea x_0 la cantidad de C-14 cuando se formó la muestra, es decir $x(0) = x_0$. La vida media del C-14 es de 5,568 años, por lo cual $x(5568) = \dfrac{x_0}{2}$. Además $\dfrac{dx}{dt}$ es la velocidad de desintegración radiactiva del C-14.

Determinaremos la edad del fósil al encontrar el valor de t para el cual $x(t) = x_0/8$. Para eso, partimos de que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= kx \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

Considerando que $x(5568) = x_0/2$, obtenemos

$$\begin{aligned} x_0 e^{5568k} &= \frac{x_0}{2} \\ 5568k &= \ln\frac{1}{2} \\ k &= -0.00012448, \end{aligned}$$

y así

$$x(t) = x_0 e^{-0.00012448t}.$$

Buscamos el valor de t para el cual

$$x(t) = \frac{x_0}{8}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} x_0 e^{-0.00012448t} &= \frac{x_0}{8} \\ -0.00012448t &= \ln\frac{1}{8} \\ t &= \frac{-\ln 8}{-0.00012448} \\ t &= 16705. \end{aligned}$$

Así, el fósil tiene una antigüedad de 16705 años.

EJEMPLO 4. En 1950 se hicieron excavaciones en Nipur (Babilonia), en las cuales se encontraron muestras de carbón que reportaron 4.09 desintegraciones por minuto y por gramo. Una muestra actual reportó 6.68 desintegraciónes por minuto y por gramo. Se sabe que la primer muestra se formó en la época del reinado de Hammurabi. Con estos datos, determine hace cuanto tiempo Hammurabi reinó en Babilonia.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de C-14 presente en el tiempo t. Entonces $\dfrac{dx}{dt}$ es la velocidad de desintegración del C-14 al tiempo t y

$$\frac{dx}{dt} = 4.09,$$

$$\frac{dx}{dt} = 6.68. \tag{3.8}$$

Sabemos por la ley de decaimiento radiactivo que el modelo a seguir es

$$\frac{dx}{dt} = kx. \tag{3.9}$$

Además

$$x(0) = x_0, \qquad x(5568) = \frac{x_0}{2}.$$

Como se vió en el problema anterior

$$x(t) = x_0 e^{-0.00012448t} \tag{3.10}$$

Sustituyendo (3.10) en (3.9), se tiene

$$\frac{dx}{dt} = kx_0 e^{-0.00012448t} \tag{3.11}$$

Considerando (3.8) en (3.11), resulta

$$\frac{dx}{dt} = 6.68e^{-0.00012448t}$$

Ahora bien, para determinar hace cuanto tiempo Hammurabi reinó en Babilonia, tendremos que calcular para que valor de t, se cumple que $\frac{dx}{dt} = 4.09$

$$\begin{aligned}
4.09 &= 6.68e^{-0.00012448t} \\
\ln\frac{4.09}{6.68} &= -0.00012448t \\
t &= -\frac{1}{0.00012448}\ln\frac{4.09}{6.68} \\
t &= 3940.9786.
\end{aligned}$$

Aproximadamente hace 3941 años que Hammurabi reinó en Babilonia.

3.3.2 Problemas de Enfriamiento

Ley de enfriamiento de Newton. En un cuerpo que se está enfriando la tasa de cambio de la temperatura $T(t)$ con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo $T(t)$ y la temperatura T_A del medio que lo rodea. Esto es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A),$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

EJEMPLO 1. Una barra metálica a una temperatura de $100°F$ se pone en un cuarto a una temperatura constante de $0°F$. Después de 20 minutos la temperatura de la barra es $50°F$.
a) ¿Cuánto tiempo tardará la barra para llegar a una temperatura de $25°F$?
b) ¿Cuál será la temperatura de la barra después de 10 minutos?

Solución. Sea $T(t)$ la temperatura de la barra al tiempo t, luego $T(0) = 100°F$ y $T(20) = 50°F$. La temperatura del medio ambiente, T_A, es $T_A = 0°F$. Nótese que $\frac{dT}{dt}$ es la velocidad a que se enfría la barra.

Por la ley de enfriamiento de Newton se tiene que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A),$$

y como $T_A = 0$, este problema queda formulado con la siguiente ecuación diferencial y sus condiciones

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= kT \\
T(0) &= 100 \\
T(20) &= 50.
\end{aligned}$$

La solución general de la ecuación diferencial es ya conocida

$$T(t) = ce^{kt}.$$

Como $T(0) = 100$ se tiene que

$$T(t) = 100e^{kt}. \tag{3.12}$$

Usando además que $T(20) = 50$ resulta

$$\begin{aligned} 100e^{20k} &= 50 \\ e^{20k} &= \frac{1}{2} \\ k &= -0.034657359. \end{aligned}$$

Sustituyendo k en (3.12) tenemos que

$$T(t) = 100e^{-0.034657359t}.$$

a) El tiempo necesario para que la temperatura de la barra sea de $25°F$ se obtiene resolviendo la ecuación $T(t) = 25$, esto es

$$100e^{-0.034657359t} = 25,$$

de donde

$$t = \frac{\ln 0.25}{-0.034657359} = 40.$$

Así que la barra tardará 40 minutos en alcanzar una temperatura de $25°F$.
b) La temperatura de la barra después de 10 minutos es igual a

$$\begin{aligned} T(10) &= 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{20}} \\ &= 70.71, \end{aligned}$$

es decir, será aproximadamente de $71°F$.

EJEMPLO 2. Un cuerpo a una temperatura desconocida se pone en un refrigerador a una temperatura constante de $1°F$. Si después de 20 minutos la temperatura del cuerpo es de $40°F$ y después de 40 minutos la temperatura del cuerpo es de $20°F$, hallar la temperatura inicial de éste.

Solución. Denotemos nuevamente con $T(t)$ a la temperatura del cuerpo en un instante dado. Así $T(20) = 40°F$, $T(40) = 20°F$, y $\dfrac{dT}{dt}$ es la velocidad con que se enfría el cuerpo. Ahora la temperatura constante del medio ambiente es $T_A = 1°F$.

Por la ley de enfriamiento de Newton, este problema se formula de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= k(T-1)\\ T(20) &= 40\\ T(40) &= 20.\end{aligned}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$T(t) = ce^{kt} + 1. \tag{3.13}$$

Para obtener c y k utilizamos las condiciones dadas, como siempre.

$$\begin{aligned}T(20) &= ce^{20k} + 1 = 40,\\ T(40) &= ce^{40k} + 1 = 20,\end{aligned}$$

de donde

$$ce^{20k} = 39 \tag{3.14}$$

y

$$ce^{40k} = 19. \tag{3.15}$$

Aplicando logaritmo natural en (3.14) y (3.15) se obtiene

$$\begin{aligned}\ln c + 20k &= \ln 39\\ \ln c + 40k &= \ln 19.\end{aligned}$$

De aquí que

$$20k = \ln 19 - \ln 39,$$

o bien

$$k = \frac{1}{20}\ln\frac{19}{39}. \tag{3.16}$$

Sustituyendo (3.16) en (3.14) resulta

$$c = \frac{39^2}{19}.$$

Usando los valores de c y k en (3.13), obtenemos que

$$\begin{aligned}T(t) &= \frac{39^2}{19}e^{\left(\frac{1}{20}\ln\frac{19}{39}\right)t} + 1\\ T(t) &= \frac{39^2}{19}\left(\frac{19}{39}\right)^{\frac{t}{20}} + 1.\end{aligned}$$

Luego

$$T(0) = \frac{39^2}{19} + 1 = 81.05.$$

La temperatura inicial del cuerpo era de $81°F$.

3.3.3 Modelos de Población

Sea $x(t)$ el número de individuos en el tiempo t. La ley de Malthus de crecimiento de poblaciones dice que la razón de cambio de la población es proporcional al número de individuos en ese tiempo, es decir

$$\frac{dx}{dt} = kx(t) \qquad k > 0.$$

Este modelo lineal para crecimiento de poblaciones, son satisfactorios siempre que la población no sea demasiado grande o bien que no se aplique a un futuro distante.

Cuando la población es demasiado grande, este modelo no puede ser exacto, ya que no refleja el hecho de que los individuos compiten entre sí por el limitado espacio vital, por recursos naturales, etc. Así pues, hay que agregar un término de competición para que el crecimiento de la población esté representado en forma más realista. Una elección adecuada del término competitivo es $-bx^2$, llamada ley logística (Verhulst, en 1837):

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \qquad a, b > 0.$$

Ahora bien, en general la constante b es muy pequeña comparada con a, de tal modo que si x no es demasiado grande, entonces el término $-bx^2$ es insignificante comparado con ax. Sin embargo, si x es grande entonces el término $-bx^2$ debe tomarse en cuenta ya que disminuye la tasa de crecimiento.

EJEMPLO 1. En un cultivo de bacterias se tenían x número de familias. Después de una hora se observaron en el cultivo 1000 familias de la bacteria y después de cuatro horas, 3000 familias. Encontrar la expresión para el número de familias de la bacteria presentes en el cultivo al tiempo t y el número de familias de la bacteria que había originalmente en el cultivo.

Solución. Sea $x(t)$ el número de familias de la bacteria que hay en t horas. De ahí que $x(1) = 1000$ y $x(4) = 3000$ y $\dfrac{dx}{dt}$ es la velocidad a la que crece el cultivo de bacterias.

Por la ley malthusiana este problema se formula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= kx \\ x(1) &= 1000 \\ x(4) &= 3000, \end{aligned}$$

cuya solución es ya conocida

$$x(t) = ce^{kt}$$

y considerando las condiciones se tiene que

$$x(t) = 693.36e^{0.366t}$$

es la expresión que nos dá el número de familias presentes en un momento t.

Observamos que el número de familias que había originalmente en el cultivo es

$$x(0) \approx 693 \quad \text{familias.}$$

EJEMPLO 2. La población $x(t)$ de una cierta ciudad satisface la ley logística

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}x - \frac{1}{10^8}x^2,$$

donde el tiempo t se mide en años. Suponiendo que la población de esta ciudad es 100,000 en 1980, determine:
a) La población como una función del tiempo t.
b) La población en el año 2000.
c) El año en que se duplicará la población de 1980.
d) El comportamiento de la población cuando $t \to \infty$.

Solución.
a) Debemos resolver el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{100}x - \frac{1}{10^8}x^2 \\ x(1980) &= 100000. \end{aligned}$$

Separando variables, tenemos que

$$\frac{dx}{10^{-2}x(1-10^{-6}x)} = dt,$$

y descomponiendo en fracciones parciales el miembro izquierdo de esta ecuación, encontramos que

$$\frac{dx}{10^{-2}x} + \frac{10^{-4}dx}{1-10^{-6}x} = dt.$$

Al integrar ambos lados, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{10^{-2}}\ln x - \frac{1}{10^{-2}}\ln(1-10^{-6}x) &= t + c \qquad 0 < x < 10^6 \\ \ln\frac{x}{1-10^{-6}x} &= \frac{1}{100}t + c_1 \\ \frac{x}{1-10^{-6}x} &= c_2 e^{\frac{1}{100}t}, \end{aligned}$$

al despejar x llegamos a que

$$x(t) = \frac{c_2 e^{\frac{1}{100}t}}{1 + c_2 10^{-6} e^{\frac{1}{100}t}}. \tag{3.17}$$

Empleando la condición inicial $x(1980) = 10^5$ en (3.17) obtenemos el valor de c_2

$$c_2 = \frac{10^6}{9e^{19.8}}.$$

Sustituyendo el valor de c_2 en (3.17) y simplificando se tiene que

$$x(t) = \frac{10^6}{1 + 9e^{19.8 - \frac{t}{100}}} \qquad t > 1980.$$

b) La población en el año 2000 es

$$x(2000) = \frac{10^6}{1 + 9e^{-0.2}} \approx 119494.63,$$

es decir en el año 2000 habrá aproximadamente 119,500 habitantes.
c) Para encontrar el año en que se duplicará la población de 1980 buscamos el valor de t tal que

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2 \times 10^5 \\
\frac{10^6}{1 + 9e^{19.8 - \frac{t}{100}}} &= 2 \times 10^5 \\
2(1 + 9e^{19.8 - \frac{t}{100}}) &= 10 \\
e^{19.8 - \frac{t}{100}} &= \frac{4}{9} \\
19.8 - \frac{t}{100} &= \ln\frac{4}{9} \\
t &= -100(\ln\frac{4}{9} - 19.8) \\
t &\approx 2061.
\end{aligned}$$

Para el año del 2061 tendremos duplicada la población de 1980.
d) Tenemos que

$$\lim_{x \to \infty} x(t) = \lim_{x \to \infty} \frac{10^6}{1 + \frac{9e^{19.8}}{e^{\frac{t}{100}}}} = 10^6.$$

Luego, en el transcurso de los años la población de esta ciudad se estabilizará en un millón de habitantes.

EJEMPLO 3. Este es un modelo para la propagación de una infección o un rumor en una población fija. Supóngase que un estudiante portador de un virus de gripe, regresa a un campus universitario, aislado, que tiene 1000 estudiantes. Supongamos que la rapidez con que el virus se propaga, es proporcional no sólo al número de estudiantes contagiados, sino también, al número de estudiantes no contagiados. Determinar el número de estudiantes contagiados después de 6 días, si además se observa que después de 4 días ya eran 50 los contagiados.

Solución. Denotemos con $x(t)$ al número de estudiantes contagiados en t días. Entonces $x(0) = 1$, $x(4) = 50$, $100 - x(t)$ expresa el número de estudiantes no contagiados y $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad con la que aumenta el número de estudiantes contagiados. Por hipótesis $\frac{dx}{dt}$ es proporcional a $[x(t)][1000 - x(t)]$.

Este problema queda formulado así

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= kx(1000 - x)\\ x(0) &= 1\\ x(4) &= 50.\end{aligned}$$

Podemos observar que

$$\frac{dx}{dt} = 1000kx - kx^2, \tag{3.18}$$

es la ecuación logística con $a = 1000k$ y $b = k$. Separamos variables en (3.18) y por fracciones parciales se tiene que

$$\frac{\frac{1}{1000}dx}{kx} + \frac{\frac{1}{1000k}dx}{1000 - x} = dt.$$

Integrando en ambos lados, obtenemos

$$\frac{1}{1000k}\ln x - \frac{1}{1000k}\ln(1000 - x) = t + c$$

y simplificando, se tiene

$$\begin{aligned}\ln\frac{x}{1000 - x} &= 1000kt + c_1\\ \frac{x}{1000 - x} &= c_2e^{1000kt},\end{aligned}$$

de donde

$$x(t) = \frac{1000c_2e^{1000kt}}{1 + c_2e^{1000kt}}. \tag{3.19}$$

Como $x(0) = 1$ tenemos que $c_2 = 1/999$ y sustituyendo el valor de c_2 en (3.19), $x(t)$ queda de la forma

$$x(t) = \frac{1000e^{1000kt}}{999 + e^{1000kt}} \tag{3.20}$$

o bien

$$x(t) = \frac{1000}{999e^{-1000kt} + 1}.$$

Además $x(4) = 50$, por lo cual

$$\frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}} = 50.$$

De esta expresión despejamos k y obtenemos que

$$\begin{aligned} k &= -\frac{1}{4000}\ln\frac{950}{49950} \\ k &= 0.000990578. \end{aligned}$$

Así , sustituyendo el valor k en (3.20), tenemos que $x(t)$ queda al fin de la forma

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.990578t}}.$$

El número de estudiantes contagiados después de 6 días está dado por

$$x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.990578(6)}} \approx 276.221,$$

es decir, 276 estudiantes han sido contagiados.

3.4 Mezclas

Vamos a considerar ahora los problemas relacionados con mezclas, en los cuales se supone que una sustancia S fluye hacia una mezcla en un recipiente, con una cierta rapidez, y la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación. Además, la mezcla uniforme sale del recipiente y pasa a otro. Nos interesa determinar la cantidad de la sustancia S presente en la mezcla para el tiempo t.

Si denotamos por $A(t)$ la cantidad de S al tiempo t, entonces la derivada $\frac{dA}{dt}$ es la razón de cambio de A con respecto a t. Si R_1 indica la razón, rapidez o tasa con la que S entra a la mezcla y R_2 representa la razón con la que sale, tenemos la ecuación diferencial lineal básica

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2,$$

de la cual determinaremos la cantidad $A(t)$ de S en el tiempo t. A continuación presentaremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Un gran tanque está parcialmente lleno con 200 gal de agua en las cuales se disuelven 20 lb de sal. Una salmuera que contiene 2 lb de sal por galón, se bombea al tanque con una rapidez de 6 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.
a) Halle el número de libras de sal en el tanque en cualquier tiempo.
b) ¿Cuánta sal está presente después de 30 min?

c) ¿Cuánta sal estará presente después de un tiempo largo?

Solución. Denotemos con $A(t)$ el número de libras de sal en el tanque después de t minutos. Entonces $\dfrac{dA}{dt}$ mide la tasa de cambio de $A(t)$ con respecto al tiempo.

Por conservación de masa, tenemos que

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2, \tag{3.21}$$

donde R_1 y R_2 son la rapidez con que entra y sale la sal del tanque, respectivamente.

Sean G_1 y G_2 el gasto volumétrico de las soluciones de entrada y salida al tanque y C_1, C_2 sus concentraciones de sal. Entonces

$$\begin{aligned} R_1 &= G_1C_1 = \left(2\frac{lb}{gal}\right)\left(6\frac{gal}{min}\right) = 12\frac{lb}{min} \\ R_2 &= G_2C_2 = \left(\frac{A(t)}{200}\frac{lb}{gal}\right)\left(6\frac{gal}{min}\right) = \frac{3}{100}A(t)\frac{lb}{min} \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación (3.21) se reduce a

$$\frac{dA}{dt} = 12 - \frac{3}{100}A$$

o equivalentemente

$$\frac{dA}{dt} + \frac{3}{100}A = 12,$$

la cual resolvemos sujeta a la condición inicial $A(0) = 20$.

a) La solución a este problema de valor inicial es

$$A(t) = 400 - 380e^{-\frac{3}{100}t}$$

que nos da la cantidad de sal al tiempo t (en minutos).

b) Después de 30 minutos la cantidad de sal es

$$A(30) = 400 - 380e^{-\frac{9}{10}} = 245.50 \text{ lb}.$$

c) Después de un tiempo largo, esto es, cuanto t tiende a infinito, vemos que A se aproxima al valor de 400 lb.

EJEMPLO 2. Suponga ahora que en el ejemplo anterior la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera a una tasa de 4 gal/min. Determine $A(t)$.

Solución. El volumen $V(t)$ de la solución en el tanque varía a una razón de

$$(G_1 - G_2)\frac{gal}{min} = 2\frac{gal}{min}$$

luego

$$V(t) = 200 + 2t,$$

así que

$$\begin{aligned} R_1 &= 12\frac{lb}{min} \\ R_2 &= \left(\frac{A(t)}{V(t)}\frac{lb}{gal}\right)\left(4\frac{gal}{min}\right) = 4\frac{A(t)}{200+2t} = \frac{2}{100+t}A. \end{aligned}$$

Por consiguiente tenemos ahora

$$\frac{dA}{dt} = 12 - \frac{2}{100+t}A$$

o bien

$$\frac{dA}{dt} + \frac{2}{100+t}A = 12$$

junto con la condición inicial $A(0) = 20$.

Resolviendo

$$A(t) = 4(100+t) - \frac{3\ 800\ 000}{(100+t)^2}.$$

EJEMPLO 3. Un tanque contiene inicialmente 60 galones de agua pura. Entra al tanque, a una tasa de 2 gal/min, salmuera que contiene 1 lb de sal por galón, y la solución (perfectamente mezclada) sale de él a razón de 3 gal/min. Obtenga el número de libras $A(t)$ de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánto demorará el tanque en vaciarse? ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

Solución. Continuaremos usando la notación introducida en los ejemplos anteriores. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} R_1 &= G_1C_1 = \left(2\frac{gal}{min}\right)\left(1\frac{lb}{gal}\right) = 2\frac{lb}{min} \\ R_2 &= G_2C_2 = \left(3\frac{gal}{min}\right)\left(\frac{A(t)}{V(t)}\frac{lb}{gal}\right) = 3\frac{A}{60-t}\frac{lb}{min}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial es

$$\frac{dA}{dt} = 2 - \frac{3}{60-t}A$$

es decir

$$\frac{dA}{dt} + \frac{3}{60-t}A = 2. \tag{3.22}$$

La condición inicial es

$$A(0) = 0. \tag{3.23}$$

La solución del problema de valor inicial (3.22)-(3.23) viene dada por

$$A(t) = 60 - t - \frac{1}{3600}(60-t)^3 \qquad 0 \leq t \leq 60.$$

El tanque se vacía después de 60 minutos. Por otro lado

$$A'(t) = -1 + \frac{1}{1200}(60-t)^2,$$

de modo que $A'(t) = 0$ si y sólo si

$$t = 60 \pm \sqrt{1200}.$$

Como $60 + \sqrt{1200} \notin [0, 60]$, $\quad A(0) = 0$, $\quad A(60) = 0$ y $A(60 - \sqrt{1200}) = \frac{2}{3}\sqrt{1200}$ se concluye que la cantidad máxima de sal que llega a tener el tanque es $\frac{2}{3}\sqrt{1200}$ lb.

EJEMPLO 4. Una cierta presa, en su máxima capacidad, contiene 1,000 millones de m^3 de agua. En un instante dado, estando llena la presa, tiene una masa de 2 toneladas de contaminantes, distribuida en forma homogénea. Suponga que en temporada de lluvias entra agua a la presa a razón de 10 millones de m^3 por día, con una masa de contaminantes de 0.09% toneladas por millón de m^3 de agua y sale con la misma rapidez. Determine la cantidad de contaminantes en la presa en cualquier instante. ¿En cuánto tiempo se reducirá la contaminación total de la presa a 1.2 toneladas?

Solución. Denotemos con $A(t)$ el número de toneladas de contaminantes después de t días.

En este caso, tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = (10)(0.0009) - (10)\frac{A(t)}{1000},$$

junto con la condición inicial $A(0) = 2$. La solución está dada por

$$A(t) = 0.9 + 1.1e^{-\frac{t}{100}}.$$

Buscamos ahora el valor de t para el cual $A(t) = 1.2$, es decir

$$0.9 + 1.1e^{-\frac{t}{100}} = 1.2,$$

de donde se obtiene el valor de $t = 129.9$ días.

EJEMPLO 5. Un tanque contiene inicialmente 100 dl de agua, en el cual se disuelven 80 kg de sal. Se introduce en el tanque agua pura a velocidad de 4 dl/min y la mezcla, conservada homogénea mediante agitación, sale a la misma velocidad y va a parar a un segundo tanque que contiene al principio 100 dl de agua pura. Agitando se mantiene homogénea la mezcla que sale de este segundo tanque a la misma velocidad ya citada. Hallar la cantidad de sal en el segundo tanque al cabo de 1 hora.

Solución. Denotemos por $A_1(t)$ y $A_2(t)$ la cantidad de sal en los tanques uno y dos, respectivamente. Para el primer tanque, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -4\frac{A_1}{100} \\ A(0) &= 80 \end{aligned}$$

y resolviendo este problema de valor inicial, obtenemos

$$A_1(t) = 80e^{-0.04t}.$$

Para el segundo tanque, la concentración de la solución de entrada está dada por

$$C_1 = \frac{A_1(t)}{100}\frac{kg}{dl} = \frac{4}{5}e^{-0.04t}\frac{kg}{dl}.$$

Luego

$$\frac{dA_2}{dt} = 4(\frac{4}{5}e^{-0.04t}) - 4\frac{A_2}{100}$$

o equivalentemente

$$\frac{dA_2}{dt} + \frac{1}{25}A_2 = \frac{16}{5}e^{-0.04t}.$$

La solución de esta ecuación diferencial, junto con la condición inicial $A_2(0) = 0$ es

$$A_2(t) = \frac{16}{5}te^{-0.04t}$$

Por lo tanto la cantidad de sal en el segundo tanque después de una hora es

$$A_2(60) = 17.4 \quad kg.$$

3.5 Circuitos Eléctricos LR y RC en Serie

En Mecánica se tiene como base fundamental las leyes de Newton, de manera análoga, en electricidad se cuenta con las leyes de Kirchhoff que describen el comportamiento de los circuitos eléctricos. En particular estamos interesados en aplicar la Segunda Ley de Kirchhoff, que enunciaremos mas adelante.

Para el estudio de los circuitos LR y RC en serie haremos uso de las Tablas 1 y 2.

Tabla 1

Cantidad	**Símbolo**	**Unidad**
Voltaje, fem o potencial	E	Volt (V)
Resistencia	R	Ohm (Ω)
Inductancia	L	Henry (H)
Capacitancia	C	Farad (F)
Corriente	i	Amper (A)
Carga Eléctrica	q	Coulomb (C)

Tabla 2

Elemento	**Caída de Potencial**
Resistencia	$E = Ri$
Inductor	$E = L\frac{di}{dt}$
Condensador	$E = \frac{1}{C}q$

Se acostumbra indicar los diferentes elementos de un circuito como se ilustra en la figura 3.4.

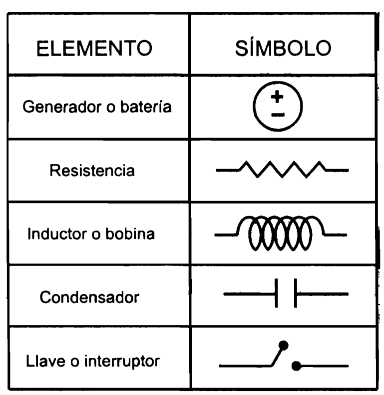


Figura 3.4: Elementos de un circuito

El siguiente es un enunciado de la Segunda Ley de Kirchhoff.

Segunda Ley de Kirchhoff. La suma algebraica de todas las caídas de potencial en cualquier camino cerrado de un circuito eléctrico es igual a cero.

Convención. La corriente fluye del lado positivo (+) de la batería o generador a través del circuito hacia el lado negativo (-).

3.5.1 Circuito LR en Serie

Consideremos el circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.5.

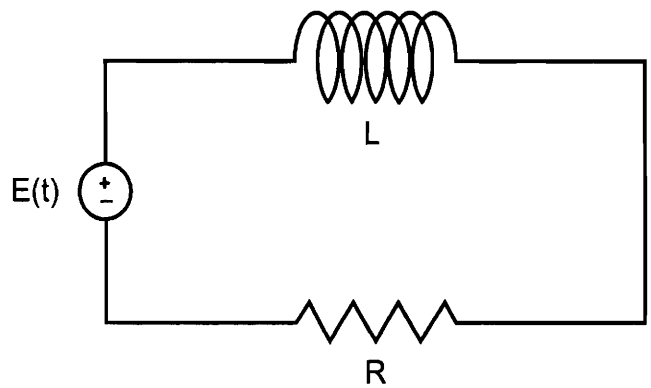


Figura 3.5: Circuito LR en serie

Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff a este circuito, la suma de las caídas de potencial a través del inductor Ldi/dt y de la resistencia Ri, es igual a la fuerza electromotriz (fem) $E(t)$ aplicada al circuito, es decir

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t). \tag{3.24}$$

Como se observa la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la corriente eléctrica a través del circuito es una ecuación diferencial lineal y puede resolverse con el método descrito anteriormente.

EJEMPLO 1. Resuelva la ecuación (3.24) si $E(t) = E_0$, donde L, R y E_0 son constantes.

Solución. En este caso la ecuación diferencial para el circuito LR en serie, toma la forma

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}.$$

Resolviendo se obtiene

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t},$$

donde c es una constante arbitraria que depende de la condición inicial $i(0) = i_0$.

Nótese que independientemente del valor de i_0, cuando t tiende a infinito el segundo término de la solución se aproxima a cero. A un término como este se le llama usualmente *término transitorio* o corriente transitoria. Al término (o términos) restante se le llama parte estacionaria de la solución. En este caso E_0/R es la corriente estacionaria; esto es, cuando t tiende a infinito, la corriente se comporta como si estuviese gobernada por la ley de Ohm ($i = E_0/R$).

EJEMPLO 2. Un generador con una fem de 50 V se conecta en serie con una resistencia de 6 Ω y un inductor de 2 henrys. Si el interruptor K se cierra a $t = 0$, determine la corriente para todo t. Ver figura 3.6

Solución. La ecuación diferencial del circuito es

$$2\frac{di}{dt} + 6i = 50$$

o equivalentemente

$$\frac{di}{dt} + 3i = 25$$

sujeta a la condición inicial $i(0) = 0$.

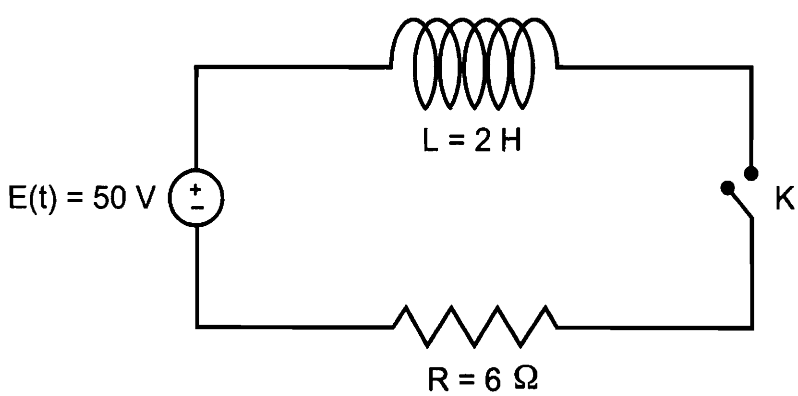


Figura 3.6: Circuito del ejemplo 2

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene

$$i(t) = \frac{25}{3} + ce^{-3t}$$

y empleando la condición inicial, encontramos que $c = -\dfrac{25}{3}$.

Por lo tanto

$$i(t) = \frac{25}{3}(1 - e^{-3t}).$$

EJEMPLO 3. Determine $i(t)$ para el circuito eléctrico del problema anterior si el generador de 50 V se reemplaza por otro con una fem de $E(t) = 10\,\text{sen}\,7t$ (figura 3.7).

Solución. Ahora la ecuación diferencial se reduce a

$$\frac{di}{dt} + 3i = 5 \operatorname{sen} 7t$$

cuya solución general está dada por

$$i(t) = \frac{5}{58}(3 \operatorname{sen} 7t - 7\cos 7t) + ce^{-3t}.$$

De la condición inicial se sigue que $c = \dfrac{35}{58}$, así que

$$i(t) = \frac{5}{58}(3 \operatorname{sen} 7t - 7\cos 7t) + \frac{35}{58}e^{-3t}.$$

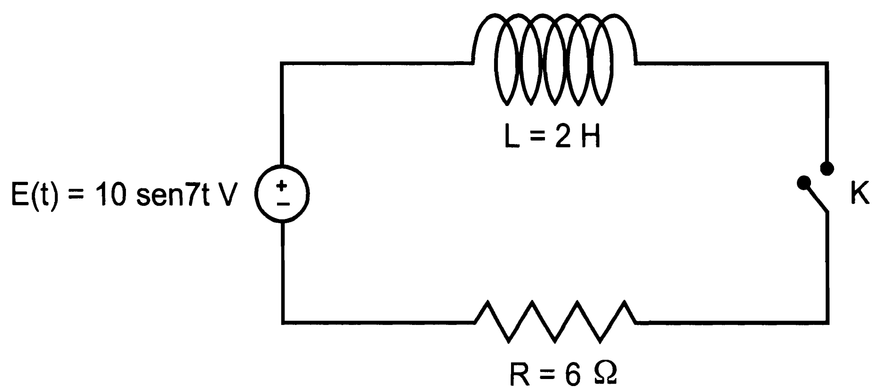


Figura 3.7: Circuito del ejemplo 3

3.5.2 Circuito RC en Serie

Estudiaremos ahora el circuito eléctrico de la figura 3.8.

Procediendo en forma análoga a nuestra discución anterior, aplicamos la segunda Ley de Kirchhoff y los resultados de la Tabla 2, al circuito RC en serie. Obtenemos

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{3.25}$$

Pero la corriente i y la carga q están relacionadas por

$$i = \frac{dq}{dt}, \tag{3.26}$$

por lo cual (3.25) se transforma en la ecuación diferencial lineal

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

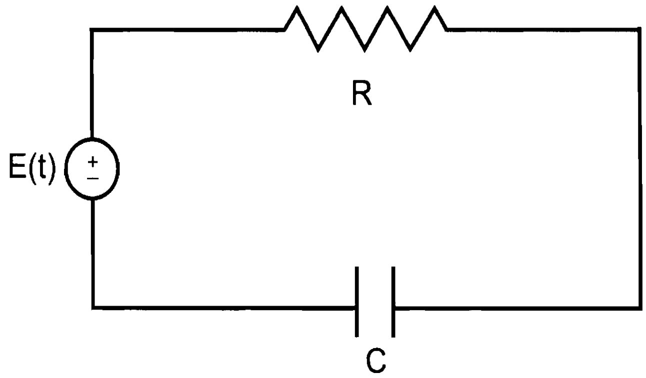


Figura 3.8: Circuito RC en serie

EJEMPLO 4. Una batería cuya fem está dada por $E(t) = 200e^{-5t}$ se conecta en serie con una resistencia de 20 Ω y un condensador de 0.01 F. Suponiendo que $q(0) = 0$ encuentre la carga y la corriente en cualquier tiempo. Muestre que la carga alcanza un máximo, calcule su valor y halle el valor de t para el cual se alcanza.

Solución. La ecuación diferencial para la carga eléctrica es

$$20\frac{dq}{dt} + 100q = 200e^{-5t}. \tag{3.27}$$

Resolviendo (3.27) sujeta a la condición inicial $q(0) = 0$, obtenemos

$$q(t) = 10te^{-5t}$$

A partir de aquí y usando (3.26), se sigue que

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 10e^{-5t}(1 - 5t).$$

Finalmente, empleando el criterio de la segunda derivada encontramos que

$$q_{max} = q(\frac{1}{5}) = 0.74 \quad \text{coulombs.}$$

¿Puede el lector interpretar físicamente el comportamiento de $q(t)$?

EJEMPLO 5. Una resistencia de R Ω varía con el tiempo t (en segundos) de acuerdo a $R = 1 + 0.01t$. Se conecta en serie con un condensador de 0.1 F y un generador con una fem de 100 V. La carga inicial en el condensador es de 5 coulombs. Encuentre
a) La carga y la corriente como una función del tiempo.
b) La carga máxima teórica.

Solución. El circuito se muestra en la figura 3.9.

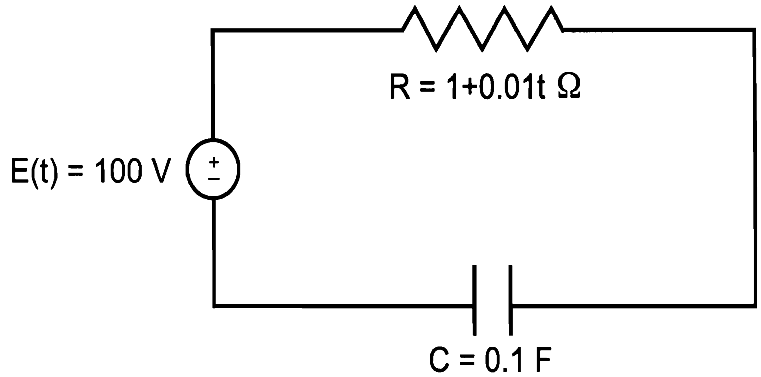


Figura 3.9: Circuito del ejemplo 5

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff al circuito obtenemos

$$(1 + 0.01t)i + 10q = 100. \tag{3.28}$$

Sustituyendo (3.26) en (3.28) se sigue que

$$\frac{dq}{dt} + \frac{10q}{1 + 0.01t} = \frac{100}{1 + 0.01t}. \tag{3.29}$$

a) La solución general de la ecuación diferencial (3.29) es

$$q(t) = 10 + c(1 + 0.01t)^{-1000}.$$

Empleando la condición inicial $q(0) = 5$, encontremos que $c = -5$, por lo cual

$$q(t) = 10 - 5(1 + 0.01t)^{-1000}$$

y consecuentemente

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 50(1 + 0.01t)^{-1001}.$$

b) Ya que $\dfrac{dq}{dt} > 0$ para todo $t > 0$, $q(t)$ es una función creciente. De manera que la carga máxima teórica está dada por

$$q_{max} = \lim_{t\to\infty} q(t) = 10 \quad \text{coulombs.}$$

EJERCICIOS 3

1. Encuentre las trayectorias ortogonales para la familia de curvas dada. Trace la gráfica de algunas curvas de la familia y de las trayectorias ortogonales.

   a) $y = ce^{-x}$

   b) $x^2 + y^2 = 2cx$

2. Determine el miembro de la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada, que pase por el punto indicado

   a) $y = c \operatorname{sen} x, \qquad (0, 2).$

   b) $y = \dfrac{1}{\ln cx}, \qquad (2, 3).$

3. El uranio se descompone a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 10 g y después de 2 horas se ha perdido el 5% de su masa original, hallar

   a) La cantidad restante de uranio como función del tiempo.

   b) La cantidad de uranio después de 5 horas.

4. Cierto material radiactivo se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad existente en cada instante. En una prueba realizada con 60 mg de este material, se observó que después de 3 horas, solamente permanecía el 80% de la masa original. Hallar

   a) La cantidad restante de masa en cualquier instante.

   b) ¿Qué cantidad de material hay después de 5 horas?

   c) ¿Cúanto tiempo debe transcurrir para que la cantidad de material sea un cuarto de la cantidad inicial?

5. Se ha observado en el laboratorio que el radio se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad de radio presente. Su vida media es de 1600 años. ¿Qué porcentaje desaparecerá en un año?

6. En un cultivo de levadura la rapidez de cambio es proporcional a la cantidad existente. Si la cantidad de cultivo se duplica en 4 horas, ¿qué cantidad puede esperarse al cabo de 12 horas?

7. Un cultivo tiene inicialmente una cantidad N_0 de bacterias. Para $t = 1$ hora, en número de bacterias medido es $\frac{3}{2}N_0$. Si la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determine el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

8. En cierto zoológico se ha observado que la cantidad de animales aumenta proporcionalmente al número actual de dichos animales. Si después de 5 años su número se ha duplicado y después de siete años el número de animales es 576, hallar el número de animales con que se contaba el día de la inauguración.

9. Supóngase que la población P de bacterias en un cultivo al tiempo t, cambia a una razón directamente proporcional a $P^2 - P$. Si inicialmente hay 1000 bacterias y después de 5 horas la población se redujo a 100 bacterias, determine:

   a) La población como función del tiempo.

   b) La población después de un tiempo grande.

10. Al apagar un motor su temperatura es de $98°C$ y el medio en que se encuentra se conserva a $21°C$. Si después de 10 minutos el motor se ha enfriado a $88°C$, encuentre:

    a) La temperatura del motor como función del tiempo.

    b) El instante en el cual su temperatura es de $35°C$.

11. Un cuerpo a una temperatura de $50°F$ se coloca al aire libre donde la temperatura es de $100°F$. Si después de 4 minutos la temperatura del cuerpo es de $60°F$, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que la temperatura del cuerpo sea de $75°F$? ¿Cuál será su temperatura después de 20 minutos?

12. Un cuerpo a una temperatura desconocida se coloca en un cuarto que se mantiene a una temperatura constante de $30°F$. Si después de 10 minutos la temperatura del cuerpo es de $0°F$ y después de 20 minutos la temperatura del cuerpo es de $15°F$, ¿Cuál es la temperatura inicial (desconocida) del cuerpo?

13. Un tanque contiene 100 litros (l) de una solución que consta de 100 kg de sal disueltos en agua. Se bombea agua pura hacia el tanque a razón de 5 l/s y la mezcla, que se mantiene uniforme mediante agitación, se extrae a la misma razón. ¿Cuánto tiempo pasará antes de que queden solamente 10 kg de sal en el tanque?

14. Un tanque de 500 galones contiene inicialmente 300 galones de solución salina en la que se han disuelto 50 libras de sal. Se agrega solución salina que contiene 3 libras de sal por galón con una rapidez de 4 gal/min. Determine cuánta sal hay en el tanque en el momento que éste se desborda.

15. Un tanque tiene 60 galones de agua pura. Una solución con 3 lb de sal por galón entra a 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a 2.5 gal/min.

    a) Halle el número de libras de sal que hay en el tanque en cualquier tiempo t.

    b) Encuentre la concentración de sal en el tanque cuando contenga 30 gal de agua salada.

16. El lago Ontario tiene un volumen de 1636 km^3 y una concentración inicial de contaminantes del 0.25%. Hay un ingreso anual de 209 km^3 de agua con una concentración de contaminentes del 0.05% y un derrame anual de igual cantidad, bien mezclada en el lago. ¿Cuánto tiempo pasará para que la concentración de contaminantes en el estanque se reduzca al 0.10% ?

17. Suponga que un cuarto contiene 32 m^3 de aire, originalmente libres de monóxido de carbono. En el instante $t = 0$ se empieza a introducir al cuarto humo de cigarrillo, con un contenido del 4% de monóxido de carbono, con una rapidez de 0.002 m^3/min y se deja salir la mezcla bien circulada, con la misma rapidez.

    a) Encuentre una expresión para la concentración $x(t)$ de monóxido de carbono en el cuarto, en cualquier instante $t > 0$.

    b) Para un ser humano, quedar expuesto a una concentración de monóxido de carbono tan baja como 0.00012 puede ser nocivo. Encuentre el tiempo en el cual se alcanza esta concentración.

18. Un tanque de 500 gal contiene inicialmente 100 gal de agua, en la cual se han disuelto 50 lb de sal. Comenzando en $t = 0$, una salmuera cuya concentración es de 2 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 5 gal/s. La mezla se mantiene uniforme mediante agitación, y estando bien agitada sale del tanque con una rapidez de 3 gal/s. ¿Qué cantidad de sal contendrá el tanque cuando esté lleno de salmuera?

19. Un tanque A contiene 100 litros de salmuera, que se obtuvo al disolver 40 kg de sal en agua. Se introduce en este tanque una salmuera, cuya concentración es de 3 kg/l, a una rapidez de 2 l/min. La mezcla se conserva homogénea, sale con la misma rapidez y va a parar a un segundo tanque B que contiene al principio 100 litros de salmuera a una concentración de 0.1 kg/l. Agitando se mantiene homogénea la mezcla en el tanque B y sale de éste con una rapidez de 1 l/min. Hallar la cantidad de sal en cada uno de los tanques en cualquier instante.

20. A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 H y la resistencia es de 50 Ω, se le aplica una tensión de 30 V. Determine la corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$. ¿Cuál será el valor de la corriente después de un tiempo largo?

21. A un circuito en serie, en el cual la resistencia es de 200 Ω y la capacitancia es de 10^{-4} F, se le aplica una tensión de 100 V. Si $q(0) = 0$, calcule la carga $q(t)$ en el capacitor y obtenga la corriente $i(t)$.

22. Un inductor de L henrys varía con el tiempo t (en segundos) de acuerdo a $L = 0.05 + 0.001t$. Se conecta en serie con un generador cuya fem es de 40 V y una resistencia de 10 Ω. Si la corriente i es cero inicialmente encuentre $i(t)$ para todo $t > 0$. ¿Cuál es la corriente máxima teórica?

23. Una resistencia de 20 Ω y un inductor de 5 H se conectan en serie en un circuito eléctrico en el cual hay un flujo de corriente de 20 A al tiempo $t = 0$. Encuentre la corriente para $t \geq 0$ si la fem es cero para $t > 0$.

24. Un condensador de 5×10^{-3} F está en serie con una resistencia de 25 Ω y una fem de $50 \cos 6t$ volts, $t \geq 0$. El interruptor se cierra en $t = 0$. Si la carga inicial en el condensador es cero, determine la carga y la corriente en cualquier tiempo.

25. Una resistencia de 20 Ω se conecta en serie con un condensador de 0.01 F y una fem en volts dada por $40e^{-3t} + 20e^{-6t}$. Si $q(0) = 0$, muestre que la carga máxima en el condensador es de 0.25 coulombs.

26. Un circuito consiste de una resistencia constante de R ohms en serie con una fem constante de E volts y una inductancia constante de L henrys. Si la corriente inicial es cero, muestre que la corriente crece a la mitad de su valor teórico máximo en $\dfrac{L \ln 2}{R}$ s.

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden

4.1 Conceptos Básicos

Definición 4.1.1 *Se dice que las funciones f y g son linealmente dependientes (l.d.) en el intervalo (a,b) si existen constantes c_1, c_2 no ambas cero tales que*

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$$

para todo $x \in (a,b)$.

Definición 4.1.2 *Decimos que las funciones f y g son linealmente independientes (l.i.) en el intervalo (a,b) si no son l.d. , es decir si las únicas constantes para las cuales*

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$$

para todo x en el intervalo (a,b), son $c_1 = c_2 = 0$.

Es fácil entender las definiciones anteriores, por ejemplo, si f y g son l.d en un intervalo I, entonces existen constantes c_1, c_2, no ambas nulas tales que

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_1 \neq 0$, de modo que

$$f(x) = -\frac{c_2}{c_1} g(x)$$

Esto es, *si dos funciones son l.d. en un intervalo I, entonces una es simplemente un múltiplo constante de la otra, para todo x en I.* Recíprocamente si para alguna constante c_2 se tiene que $f(x) = c_2 g(x)$, $x \in I$, entonces

$$(-1) \cdot f(x) + c_2 g(x) = 0$$

para todo x en I. Por lo tanto, las funciones f y g son l.d. en I puesto que al menos una de las constantes es diferente de cero ($c_1 = -1$).

Concluimos entonces que *dos funciones son l.i. en un intervalo I cuando ninguna es un múltiplo constante de la otra en I.*

EJEMPLO 1. Muestre que las siguientes parejas de funciones son l.d. en $\mathbb{R}$.
a) $f(x) = x,\ g(x) = -2x$.
b) $f(x) = e^x,\ g(x) = \frac{1}{3}e^x$.
c) $f(x) = x^2,\ g(x) = -\sqrt{2}x^2$.

Solución. En cada inciso, las parejas de funciones son claramente l.d. en $\mathbb{R}$ ya que una es un múltiplo escalar de la otra. En efecto, tenemos que
a) $g(x) = -2f(x)$, o equivalentemente $2f(x) + g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
b) $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$, ó $\frac{1}{3}f(x) + (-1)g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
c) $g(x) = -\sqrt{2}f(x)$, ó $\sqrt{2}f(x) + g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 2. Compruebe que las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ son l.i. en $\mathbb{R}$.

Solución. Supóngase por contradicción que f y g son l.d. en $\mathbb{R}$, es decir que existen constantes c_1 y c_2 no simultáneamente nulas tales que

$$c_1x + c_2x^2 = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Si derivamos (4.1) con respecto a x obtenemos

$$c_1 + 2c_2x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Luego, el sistema de ecuaciones lineales (4.1)-(4.2) tiene una solución no nula ($c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$). De álgebra sabemos que para un sistema homogéneo, ésto es posible solamente si el determinante del sistema es cero. Así que

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 = 0,$$

para todo x en $\mathbb{R}$.

Por consiguiente, la suposición de que las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ son l.d. en $\mathbb{R}$ nos llevó a concluir que $x^2 = 0$ para todo x en $\mathbb{R}$, lo cual claramente es falso. Esto nos muestra que f y g son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Podemos generalizar las ideas expuestas en el ejemplo 2. Primero hacemos la definición:

Definición 4.1.3 *Sean f y g funciones derivables en el intervalo I. A la función definida por el determinante*

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x),$$

se le llama el **wronskiano** *de $f(x)$ y $g(x)$ y se denota por $W(f(x), g(x))$ o $W(f, g)$. El valor de $W(f, g)$ en el punto x se indicará por $W(f, g)(x)$ o simplemente $W(x)$.*

Para determinar si dos funciones son l.i. podemos emplear el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1 *Sean f y g funciones derivables en un intervalo I. Si el wronskiano $W(f, g)$ es diferente de cero en por lo menos un punto x_0 del intervalo I, entonces f y g son linealmente independientes en I.*

Demostración. Haremos la demostración por contradicción. Supóngase que $W(f, g)(x_0) \neq 0$ para algún x_0 fijo en el intervalo I y que f y g son linealmente dependientes en I. Entonces existen constantes c_1 y c_2 no ambas cero tales que

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0, \tag{4.3}$$

para todo x en I. Derivando (4.3) resulta

$$c_1 f'(x) + c_2 g'(x) = 0. \tag{4.4}$$

Luego, el sistema de ecuaciones (4.3)-(4.4) tiene una solución diferente de la trivial para cada x en I, por lo cual

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0,$$

para todo x en I. Esto contradice la hipótesis de que $W(f, g)(x_0) \neq 0$. Por lo tanto se concluye que f y g son linealmente independientes en I.

EJEMPLO 3. Demuestre que las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ son l.i. en $\mathbb{R}$.

Solución. Ya que

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2 \neq 0,$$

para todo x en $\mathbb{R}$, del Teorema 4.1.1 se concluye que f y g son l.i. en $\mathbb{R}$.

Finalizaremos está sección recordando algunas nociones muy elementales sobre los números complejos.

Un **número complejo** z puede representarse en la forma $z = a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ se denominan parte real y parte imaginaria de z, respectivamente y el símbolo i denota al número imaginario puro que tiene la propiedad de que $i^2 = -1$.

La igualdad $i^2 = -1$ nos permitirá obtener raíces de números negativos, puesto que $\pm i = \sqrt{-1}$. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \sqrt{-4} &= \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i, \\ \sqrt{-25} &= \sqrt{25(-1)} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = \pm 5i. \end{aligned}$$

Para sumar o restar dos números complejos, simplemente se suman o se restan las partes reales o imaginarias correspondientes. Para multiplicar dos números complejos, se aplica la propiedad distributiva y el hecho de que $i^2 = -1$.

La posibilidad de calcular raíces cuadradas de números negativos permite afirmar ahora que toda ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b, c, números reales, tiene dos raíces que pueden ser reales y distintas, reales e iguales o complejas.

También aplicaremos la identidad (**Fórmula de Euler**)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta,$$

con θ un número real.

EJERCICIOS 4.1

Pruebe que los pares de funciones dados son l.i. en $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x, \qquad g(x) = xe^x$
2. $f(x) = e^{r_1 x}, \qquad g(x) = e^{r_2 x}; \quad r_1 \neq r_2$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad g(x) = \cos x$
4. $f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad g(x) = \operatorname{sen} 2x$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad g(x) = x$
6. $f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad g(x) = e^x$
7. $f(x) = e^x \cos 2x, \qquad g(x) = e^x \operatorname{sen} 2x$
8. $f(x) = e^x \cos 2x, \qquad g(x) = e^{2x} \cos 2x$
9. $f(x) = 1, \qquad g(x) = x$
10. $f(x) = x^m, \qquad g(x) = x^n; \quad m \neq n$

4.2 Solución de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden

Definición 4.2.1 *Una ecuación diferencial de la forma*

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \tag{4.5}$$

donde $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ y $f(x)$ son funciones de x únicamente, se llama ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Para este tipo de ecuaciones, el siguiente teorema garantiza la existencia de una solución única.

Teorema 4.2.1 *Sean $a_0(x), a_1(x), a_2(x), f(x)$, funciones continuas en un intervalo I y supóngase que $a_2(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. Si x_0 es cualquier punto en I, entonces existe una y sola una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial*

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x),$$

que satisface las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \end{aligned}$$

donde y_0, y_1 son constantes arbitrarias.

Definición 4.2.2 *La ecuación diferencial*

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{4.6}$$

que se obtiene de (4.5) haciendo $f(x) = 0$, se llama ***ecuación homogénea, reducida o complementaria****.*

Si la función $f(x)$ no es idénticamente nula, entonces la ecuación (4.5) recibe el nombre de **ecuación no homogénea** .

Para hallar la solución de la ecuación (4.5) es necesario resolver la ecuación homogénea asociada (4.6). Por esta razón veremos primero algunos resultados concernientes a la solución de esta última.

4.2.1 Solución de la Ecuación Homogénea

Teorema 4.2.2 *Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial (4.6) entonces la combinación lineal $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es solución de (4.6), donde c_1 y c_2 son números reales o complejos cualesquiera.*

El teorema anterior nos dice que si y_1, y_2 son soluciones de (4.6), entonces es posible elaborar un número infinito de soluciones de dicha ecuación, de la forma $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, con c_1, c_2 constantes. Una pregunta natural sería si esta infinidad de soluciones incluye a todas las soluciones posibles de (4.6). La respuesta a esta pregunta es **si**, pero siempre y cuando y_1 y y_2 sean l.i. . Hacemos la siguiente definición.

Definición 4.2.3 *Si y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación (4.6), que además son linealmente independientes en un intervalo I, entonces decimos que y_1 y y_2 constituyen un* ***conjunto fundamental de soluciones*** *de (4.6) en I.*

Por consiguiente nos interesa saber cuando dos soluciones de la ecuación diferencial homogénea (4.6) son l.i. en algún intervalo. El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para la independencia lineal de **soluciones** (compárese con el Teorema 4.1.1).

Teorema 4.2.3 *Supongamos que* $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ *son funciones continuas en un intervalo* I *y que* $a_2(x) \neq 0$ *para toda* $x \in I$. *Sean* y_1, y_2 *dos soluciones de la ecuación (4.6) en* I. *Entonces,* y_1, y_2 *son l.i. (forman un conjunto fundamental de soluciones) en* I *si y solo si* $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, *para algún* $x_0 \in I$.

A continuación enunciamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2.4 *Supongamos que* $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ *son funciones continuas en un intervalo* I *y que* $a_2(x) \neq 0$ *para toda* $x \in I$. *Entonces la ecuación diferencial homogénea (4.6)*

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

tiene dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, *que son* ***linealmente independientes*** *en* I. *Además, para cualquier otra solución* $y = \phi(x)$ *de (4.6) en* I *se pueden encontrar constantes* c_1 *y* c_2 *tales que*

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \qquad x \in I. \tag{4.7}$$

En vista de (4.7), la **solución general** de la ecuación (4.6) se define como

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \qquad x \in I,$$

donde y_1, y_2 son soluciones l.i. en I de (4.6) y c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

4.2.2 Solución de la Ecuación no Homogénea

Estamos ya en posición de explicar cómo determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea (4.5). En primer lugar enunciamos la siguiente propiedad del conjunto de sus soluciones.

Teorema 4.2.5 *La diferencia de dos soluciones cualesquiera de la ecuación diferencial no homogénea (4.5) es una solución de la correspondiente ecuación homogénea (4.6).*

Como una consecuencia inmediata de este teorema, a continuación damos el resultado principal, que nos dice cómo determinar la solución general de (4.5).

Teorema 4.2.6 *Dada una solución* $y_p(x)$ *de la ecuación diferencial (4.5) en un intervalo* I, *entonces para cualquier solución* $y = \phi(x)$ *de esta ecuación, existen constantes* c_1, c_2 *tales que*

$$\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x), \qquad x \in I, \tag{4.8}$$

donde y_1 *y* y_2 *son soluciones l.i. en* I *de la ecuación homogénea correspondiente (4.6).*

De acuerdo con (4.8), la **solución general** de la ecuación diferencial lineal no homogénea (4.5) se define como

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x), \qquad x \in I, \tag{4.9}$$

Llamaremos a y_p una **solución particular** de (4.5). A la solución general de la ecuación homogénea (4.6) se le denomina **solución complementaria** y la denotaremos por $y_c(x)$. Es decir

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

En consecuencia, podemos escribir la solución general (4.9) de la ecuación no homogénea (4.5) en la forma

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x). \tag{4.10}$$

Posponemos hasta la sección 4.6 la discución de cómo determinar y_p.

4.3 Método de Reducción de Orden

Dada una solución $y_1(x)$ de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{4.11}$$

puede determinarse una segunda solución $y_2(x)$ que sea linealmente independiente con $y_1(x)$, de la forma $v(x)y_1(x)$, para cierta función $v(x)$ distinta de una constante.

Sea $y(x) = y_1(x)v(x)$, entonces

$$\begin{aligned} y' &= y_1 v' + y_1' v \\ y'' &= y_1 v'' + 2y_1' v' + y_1'' v. \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores para y, y' y y'' en (4.11) y simplificando resulta

$$\begin{aligned} (y_1 v'' + 2y_1' v' + y_1'') + p(x)(y_1 v' + y_1' v) + q(x)v &= 0, \\ v(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + v'(2y_1' + p(x)y_1) + y_1 v'' &= 0. \end{aligned}$$

Y como y_1 es una solución de (4.11), el primer término en el lado izquierdo de la igualdad anterior es igual a cero. Así que

$$y_1 v'' + (2y_1' + p(x)y_1)v' = 0$$

o bien

$$v'' + \left(p(x) + \frac{2y_1'}{y_1}\right) v' = 0. \tag{4.12}$$

Luego, para que la función $y_1(x)v(x)$ sea una solución de la ecuación diferencial (4.11), $v(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial de segundo orden (4.12). Nótese que haciendo la sustitución $u(x) = v'(x)$ entonces $u'(x) = v''(x)$ y (4.12) se reduce a la ecuación

$$u' + \left(p(x) + \frac{2y_1'}{y_1}\right) u = 0, \tag{4.13}$$

la cual es ahora de primer orden para la función incógnita u. Es por esta razón que al método que estamos desarrollando para calcular y_2 se le conoce como **Método de Reducción de Orden**.

La ecuación (4.13) es lineal en u y también de variables separables. Separando variables tenemos

$$\begin{aligned}\frac{du}{u} &= -\left(p(x)+\frac{2y_1'}{y_1}\right)\\ &= -p(x)-2\frac{d}{dx}(\ln y_1),\end{aligned}$$

e integrando y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}\ln u &= -\int p(x)dx - 2\ln y_1 + \ln c\\ \ln u &= \ln c y_1^{-2} - \int p(x)dx,\end{aligned}$$

donde c es una constante arbitraria. Aplicando exponencial a ambos lados de la última igualdad encontramos que

$$u(x) = \frac{c}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}.$$

Por consiguiente

$$v(x) = c\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx.$$

Tomando $c = 1$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.1 *Si $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{4.14}$$

entonces una segunda solución $y_2(x)$ de (4.14) linealmente independiente con $y_1(x)$ es

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx. \tag{4.15}$$

EJEMPLO 1. Dado que $y_1(x) = x^{-2}$ es solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 7xy' - 20y = 0, \tag{4.16}$$

encuentre su solución general en el intervalo $(0, \infty)$.

Solución. Verifiquemos que $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial (4.16). Tenemos que

$$y_1'(x) = -2x^{-3}, \qquad y_1''(x) = 6x^{-4}.$$

Sustituyendo en (4.16) resulta

$$\begin{aligned} x^2 6x^{-4} - 7x(-2x^{-3}) - 20x^{-2} &= 0 \\ 6x^{-2} + 14x^{-2} - 20x^{-2} &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Así, efectivamente y_1 es una solución de (4.16).

Ahora utilizaremos el resultado (4.15) del teorema anterior para determinar una segunda solución de la ecuación diferencial, l.i. con y_1.

Primero, reescribimos (4.16) en la forma

$$y'' - \frac{7}{x}y' - \frac{20}{x^2}y = 0$$

de aquí que en este caso $p(x) = -\dfrac{7}{x}$ y entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx &= \int \frac{e^{-\int -\frac{7}{x}dx}}{(x^{-2})^2}dx = \int \frac{e^{7\ln x}}{x^{-4}}dx \\ &= \int \frac{x^7}{x^{-4}}dx = \int x^{11}dx = \frac{x^{12}}{12}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y_2(x) = x^{-2}\frac{x^{12}}{12} = \frac{x^{10}}{12}.$$

Note que una segunda solución l.i. con $y_1(x)$ es simplemente $\tilde{y}_2(x) = x^{10}$. De modo que la solución general en $(0, \infty)$ de la ecuación diferencial (4.16) es

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{10}.$$

EJEMPLO 2. Encuentre la solución general en $(0, \infty)$ de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' + y = 0, \tag{4.17}$$

si $y_1(x) = \cos \ln x$, es una solución de la ecuación.

Solución. Nuevamente emplearemos (4.15) para obtener una segunda solución y_2 de (4.17). En este caso $p(x) = \dfrac{1}{x}$, por lo cual

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx &= \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{\cos^2 \ln x}dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{x}}{\cos^2 \ln x}dx = \tan \ln x. \end{aligned}$$

En consecuencia
$$y_2(x) = (\cos \ln x)(\tan \ln x) = \operatorname{sen}\, \ln x.$$
De donde la solución general en $(0, \infty)$ de (4.17) es
$$y(x) = c_1 \cos \ln x + c_2 \operatorname{sen}\, \ln x.$$

EJERCICIOS 4.3

Verifique si la función y_1 indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. En caso de serlo determine la solución general de la ecuación.

1. $y'' - 9y = 0, \qquad y_1 = e^{3x}$
2. $y'' + 9y = 0, \qquad y_1 = \cos 3x$
3. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y_1 = x$
4. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \qquad y_1 = x^2$
5. $x^3y'' + x^2y' + xy = 0, \qquad y_1 = \operatorname{sen}(\ln x)$
6. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \qquad y_1 = x^2$
7. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0, \qquad y_1 = x$
8. $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0, \qquad y_1 = x + 1$
9. $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0, \qquad y_1 = x$
10. $x^2y'' + 3xy' = 0, \qquad y_1 = 1$
11. $x^2y'' + xy' - 4y = 0, \qquad y_1 = x^2$
12. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y_1 = x$
13. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0, \qquad y_1 = x^{-1/2}\cos x$
14. $x^2y'' + xy' = 0, \qquad y_1 = 1$
15. $x^2y'' - xy' + y = 0, \qquad y_1 = x \ln x$
16. $(4\cot x)y'' + (4 - \operatorname{sen} x)y' - y = 0, \qquad y_1 = \operatorname{sen} x$

4.4 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden Homogéneas con Coeficientes Constantes

En esta sección estudiaremos la ecuación diferencial de la forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.18}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Para este tipo de ecuaciones proponemos una solución de la forma

$$y(x) = e^{rx}.$$

Entonces

$$y'(x) = re^{rx}, \quad y''(x) = r^2e^{rx}$$

y sustituyendo en la ecuación (4.18) resulta

$$\begin{aligned} ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \\ e^{rx}(ar^2 + br + c) &= 0. \end{aligned}$$

Luego, si r es una raíz de la ecuación

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{4.19}$$

llamada **ecuación auxiliar o ecuación característica**, la función $y = e^{rx}$ es una solución de (4.18). Debemos considerar tres casos, según sean las raíces características: reales y distintas, reales e iguales o complejas.

CASO 1. Si r_1 y r_2 son raíces reales y distintas entonces $y_1(x) = e^{r_1x}$ y $y_2(x) = e^{r_2x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (4.18), de donde su solución general es

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}.$$

CASO 2. Si las raíces son reales e iguales entonces $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a} = r$. Así que, una solución de (4.18) es $y_1(x) = e^{rx}$.

Podemos encontrar una segunda solución y_2 linealmente independiente con y_1 empleando la fórmula (4.15), del método de reducción de orden estudiado en la sección anterior. Tenemos

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx \\ &= e^{-\frac{b}{2a}x}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{\left(e^{-\frac{b}{2a}x}\right)^2}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{b}{2a}x}\int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x}}dx \\
&= xe^{-\frac{b}{2a}} \\
&= xy_1(x).
\end{aligned}$$

Luego, para obtener una segunda solución linealmente independiente con $y_1(x)$, basta con multiplicar $y_1(x)$ por x.

La solución general de (4.18) en este caso es

$$y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}.$$

o bien

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{rx}.$$

CASO 3. Supongamos finalmente que las raíces son complejas y denotémoslas por

$$r_1 = \alpha + i\beta; \quad r_2 = \alpha - i\beta.$$

Entonces dos soluciones l.i. de la ecuación diferencial son

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Sin embargo, estamos interesados en encontrar soluciones con valores reales. Tenemos que $y(x) = k_1e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2e^{(\alpha-i\beta)x}$, es solución de la ecuación diferencial, para cualesquier constantes k_1 y k_2. Pero, de la fórmula de Euler se sigue que

$$\begin{aligned}
y(x) &= k_1e^{\alpha x+i\beta x} + k_2e^{\alpha x-i\beta x} \\
&= k_1e^{\alpha x}e^{i\beta x} + k_2e^{\alpha x}e^{-i\beta x} \\
&= e^{\alpha x}(k_1e^{i\beta x} + k_2e^{-i\beta x}) \\
&= e^{\alpha x}[k_1(\cos\beta x + i\text{sen}\,\beta x) + k_2(\cos\beta x - i\ \text{sen}\,\beta x)] \\
&= e^{\alpha x}[(k_1 + k_2)\cos\beta x + (k_1 - k_2)i\ \text{sen}\,\beta x].
\end{aligned}$$

Ahora bien, si en particular tomamos $k_1 = k_2 = \dfrac{1}{2}$, obtenemos que la función

$$y_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + 0) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

es una solución de la ecuación de variable real con valores reales.

Análogamente, si $k_1 = -\dfrac{i}{2}$; $\quad k_2 = \dfrac{i}{2}$ resulta la función

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\left[0 + \left(-\frac{i}{2} - \frac{i}{2}\right) i\ \text{sen}\,\beta x\right] = e^{\alpha x}\text{sen}\,\beta x,$$

que también es una solución de la ecuación que toma valores reales. Por lo tanto, dos soluciones de la ecuación diferencial linealmente independientes con valores reales son

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x; \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

La solución general de (4.18) ahora es

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x).$$

EJEMPLO 1. Resolver

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Solución. La ecuación tiene soluciones de la forma $y = e^{rx}$ donde r es solución de la ecuación auxiliar

$$\begin{aligned} r^2 - r - 6 &= 0 \\ (r-3)(r+2) &= 0, \end{aligned}$$

de modo que las raíces características son $r_1 = 3$, $r_2 = -2$. Por lo tanto, dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial son $y_1(x) = e^{3x}$ y $y_2(x) = e^{-2x}$. De donde la solución general es

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}.$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$y'' - 5y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar es

$$r^2 - 5 = 0.$$

Las raíces características son $r_1 = \sqrt{5}$, $r_2 = -\sqrt{5}$. de donde, dos soluciones l.i. de la ecuación son

$$y_1(x) = e^{\sqrt{5}x}, \qquad y_2(x) = e^{-\sqrt{5}x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1e^{\sqrt{5}x} + c_2e^{-\sqrt{5}x}.$$

EJEMPLO 3. Resolver

$$y'' + 12y' + 36y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar es

$$\begin{aligned} r^2 + 12r + 36 &= 0 \\ (r+6)^2 &= 0 \end{aligned}$$

y las raíces características son

$$r_1 = r_2 = -6.$$

Por lo tanto, dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(x) = e^{-6x}, \qquad y_2(x) = xe^{-6x}.$$

De donde la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-6x} + c_2 x e^{-6x} = (c_1 + c_2 x)e^{-6x}.$$

EJEMPLO 4. Resolver

$$y'' - 16y' + 64y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar es

$$r^2 - 16r + 64 = 0.$$

Sus raíces son $r_1 = r_2 = 8$. Por lo tanto, dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(x) = e^{8x}, \qquad y_2(x) = xe^{8x}.$$

Así , la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{8x}.$$

EJEMPLO 5. Resolver

$$y'' + 2y' + 17y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 2r + 17 = 0.$$

Las raíces están dadas por

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-68}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-2 \pm 8i}{2} = -1 \pm 4i$$

o bien

$$r_1 = -1 + 4i, \qquad r_2 = -1 - 4i.$$

Por lo tanto, dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(x) = e^{-x}\cos 4x, \qquad y_2(x) = e^{-x}\operatorname{sen} 4x.$$

de donde, la solución general es

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x).$$

EJEMPLO 6. Resolver

$$y'' + y' + y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar es

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

cuyas raíces son

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

De donde, dos soluciones linealmente independientes son

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \qquad y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

EJEMPLO 7. Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0,$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Solución. La ecuación característica es r^2+1 y sus raíces son $r = \pm i$. Luego, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Ahora, la primera condición inicial implica que

$$1 = y(0) = c_1, \qquad c_1 = 1.$$

Por otra parte, tenemos que

$$y'(x) = -c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

y usando la segunda condición inicial

$$-1 = y'(0) = c_2, \qquad c_2 = -1.$$

Por lo tanto, la solución que satisface las condiciones iniciales es

$$y(x) = \cos x - \operatorname{sen} x.$$

EJEMPLO 8. Resolver el problema de valores iniciales

$$y'' - y' - 2y = 0; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Solución. La ecuación característica es

$$\begin{aligned} r^2 - r - 2 &= 0 \\ (r-2)(r+1) &= 0, \end{aligned}$$

de modo que las raíces características son $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$. La solución general es entonces

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

De las condiciones iniciales, se sigue que

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 \\ 4 &= y'(0) = 2c_1 e^o - c_2 e^0 = 2c_1 - c_2. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ 2c_1 - c_2 &= 4, \end{aligned}$$

obtenemos

$$c_1 = \frac{5}{3}, \qquad c_2 = -\frac{2}{3}.$$

Por lo tanto, la solución que satisface las condiciones iniciales es

$$y(x) = \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}.$$

EJERCICIOS 4.4

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y'' + 5y = 0$
2. $y'' + 9y' - 10y = 0$
3. $y'' - 4y' + 12y = 0$
4. $4y'' + 7y' - 2y = 0$
5. $y'' + 6y' + 9y = 0$
6. $2y'' - 14y' + 3y = 0$
7. $y'' - 18y' + 81y = 0$
8. $4y'' + y' + 2y = 0$
9. $y'' - 6y' + 5y = 0 \quad$ con $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 11$
10. $y'' + 4y' + 5y = 0 \quad$ con $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
11. $y'' + 4y = 0 \quad$ con $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$
12. $y'' - 2y' + y = 0 \quad$ con $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$

4.5 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden n

Presentaremos ahora la generalización de los resultados enunciados en la secciones 4.1 y 4.2.

Definición 4.5.1 *Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es* ***linealmente dependiente (l.d.)*** *en un intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas cero tales que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo x en I. Mientras que $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son ***linealmente independientes (l.i.)*** *en I si no son l.d. en I, es decir, la igualdad*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo $x \in I$ implica que $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$.

Definición 4.5.2 *Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$, funciones que tienen al menos $n-1$ derivadas en un intervalo abierto I. Para x en I, el* ***wronskiano*** *de dichas funciones se define como el determinante*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Definición 4.5.3 *Se dice que una ecuación diferencial de orden n es* **lineal** *si tiene la forma*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x), \tag{4.20}$$

donde las funciones $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ y $g(x)$ dependen solamente de la variable x.

Como antes, la ecuación (4.20) es no homogénea si $g(x) \neq 0$ y haciendo $g(x) = 0$ obtenemos la ecuación homogénea reducida o complementaria

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \tag{4.21}$$

Teorema 4.5.1 *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (4.21) en un intervalo I, esto es, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son l.i. en I o equivalentemente $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$. Entonces la solución general de (4.21) está dada por*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x), \qquad x \in I,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Teorema 4.5.2 *Sea y_p una solución dada de la ecuación diferencial no homogénea (4.20) en el intervalo I y sea*

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

la solución general de la ecuación homogénea asociada (4.21) en el intervalo I. Entonces la solución general de (4.20) es

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

4.5.1 Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden n Homogéneas con Coeficientes Constantes

En la sección 4.4 estudiamos como resolver una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Ahora, de manera más general, consideraremos la ecuación diferencial de orden n

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \tag{4.22}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales.

Es fácil ver que una función exponencial de la forma

$$y = e^{rx},$$

es solución de (4.22) si y sólo si r es una raíz de la ecuación

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \tag{4.23}$$

A (4.23) se le llama **ecuación auxiliar o ecuación característica** de la ecuación diferencial (4.22).

No podemos hacer un análisis general de las raíces de la ecuación auxiliar (4.23) semejante al que hicimos para las ecuaciónes de orden 2, ya que pueden aparecer muchas combinaciones si n es mayor que dos. Por ejemplo una ecuación de quinto grado puede tener cinco raíces reales diferentes, tres raíces reales diferentes y dos raíces complejas, una raíz real y cuatro complejas, cinco raíces reales e iguales, cinco raíces reales con tres de ellas iguales, y así sucesivamente. En su lugar mencionaremos los siguientes tres casos.

CASO 1. Si todas las raíces de (4.23), $r_1, r_2, \ldots, r_n$, son reales y distintas entonces la solución general de (4.22) es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots + c_n e^{r_n x}.$$

CASO 2. Si r_1 es una raíz de multiplicidad k de (4.23), es decir k raíces son iguales a r_1, entonces correspondiendo a esta raíz se tienen las siguientes k soluciones l.i. de (4.22)

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{r_1 x}$$

y la solución general de (4.22) debe contener la combinación lineal

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + c_3 x^2 e^{r_1 x} + \cdots + c_{k-1} x^{k-1} e^{r_1 x}.$$

CASO 3. Cuando $r_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de multiplicidad k de (4.23), su conjugado $r_2 = \alpha - i\beta$ es también raíz de multiplicidad k. En este caso, la solución general de la ecuación diferencial (4.22) debe contener una combinación lineal de las siguientes $2k$ soluciones l.i.

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, xe^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, x^2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

EJEMPLO 1. Resolver

$$y^{(4)} - y''' - 7y'' + y' + 6y = 0. \tag{4.24}$$

Solución. La ecuación auxiliar de (4.24) es

$$\begin{aligned} r^4 - r^3 - 7r^2 + r + 6 &= 0 \\ (r-1)(r+1)(r+2)(r-3) &= 0, \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2, \quad r_4 = 3.$$

Luego, cuatro soluciones linealmente independientes de la ecuación son

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = e^{-2x}, \quad y_4(x) = e^{3x}$$

y la solución general de (4.24) es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{-2x} + c_4e^{3x}.$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$y^{(6)} - 8y^{(5)} + 17y^{(4)} + 6y''' - 44y'' + 8y' + 32y = 0. \tag{4.25}$$

Solución. La ecuación auxiliar de (4.25) es

$$\begin{aligned} r^6 - 8r^5 + 17r^4 + 6r^3 - 44r^2 + 8r + 32 &= 0 \\ (r-2)^3(r-4)(r+1)^2 = 0. \end{aligned}$$

De la última expresión es claro que las raíces de la ecuación auxiliar, con sus respectivas multiplicidades son

$$\begin{aligned} r_1 &= 2, && \text{de multiplicidad tres;} \\ r_2 &= 4, && \text{de multiplidad uno (raíz simple);} \\ r_3 &= -1, && \text{de multiplicidad dos (raíz doble).} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta cada raíz y sus multiplicidades respectivas, tenemos las siguientes soluciones l.i. de (4.25)

$$\begin{aligned} e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x} & \quad \text{correspondientes a la raíz} \quad r_1 = 2, \\ e^{4x} & \quad \text{correspondiente a la raíz} \quad r_2 = 4, \\ e^{-x}, xe^{-x} & \quad \text{correspondientes a la raíz} \quad r_3 = -1. \end{aligned}$$

Por consiguiente la solución general de (4.25) es

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x} + c_4e^{4x} + (c_5 + c_6x)e^{-x}.$$

EJEMPLO 3. Resolver

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0. \tag{4.26}$$

Solución. La ecuación auxiliar es

$$\begin{aligned} r^4+8r^2+16 &= 0 \\ (r^2+4)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, las raíces características son en este caso $r_1 = 2i$ y $r_2 = -2i$ de multiplicidad dos, cada una de ellas. Correspondientemente tenemos las cuatro soluciones l.i.

$$y_1(x) = \cos 2x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad y_3(x) = x\cos 2x, \quad y_4(x) = x \operatorname{sen} 2x.$$

Por lo tanto la solución general de (4.25) es

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + x(c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x).$$

EJEMPLO 4. Resolver

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0. \tag{4.27}$$

Solución. La ecuación auxiliar es

$$\begin{aligned} r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 &= 0 \\ (r-1)^2(r^2+1) &= 0, \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, && \text{de multiplicidad dos;} \\ r_2 &= i, && \text{de multiplicidad uno;} \\ r_3 &= -i, && \text{de multiplicidad uno.} \end{aligned}$$

De donde, la solución general de (4.27) es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x.$$

EJEMPLO 5. Resolver

$$y^{(8)} - 10y^{(7)} + 46y^{(6)} - 106y^{(5)} + 88y^{(4)} + 146y''' - 350y'' + 98y' + 343y = 0. \tag{4.28}$$

Solución. La ecuación auxiliar es

$$\begin{aligned} r^8 - 10r^7 + 46r^6 - 106r^5 + 88r^4 + 146r^3 - 350r^2 + 98r + 343 = 0 &= 0 \\ (r+1)^2(r^2-4r+7)^3 &= 0 \end{aligned}$$

y sus raíces son

$$\begin{aligned} r_1 &= -1, && \text{de multiplicidad dos;}\\ r_2 &= 2+\sqrt{3}i, && \text{de multiplicidad tres;}\\ r_3 &= 2-\sqrt{3}i, && \text{de multiplicidad tres.}\end{aligned}$$

De modo que, la solución general de (4.28) es

$$\begin{aligned} y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x} + e^{2x}(c_3\cos\sqrt{3}x + c_4\operatorname{sen}\sqrt{3}x) + \\ xe^{2x}(c_5\cos\sqrt{3}x + c_6\operatorname{sen}\sqrt{3}x) + x^2e^{2x}(c_7\cos\sqrt{3}x + c_8\operatorname{sen}\sqrt{3}x).\end{aligned}$$

EJEMPLO 6. ¿Cuál es la solución general de una ecuación diferencial cuya ecuación auxiliar tiene raíces: $2, -1, 0, 0, 3 \pm 5i, 2, 0, , 3 \pm 5i$?

Solución. La ecuación auxiliar es de grado 10 y sus raíces, con sus respectivas multiplicidades son

$$\begin{aligned} 0, &\quad \text{de multiplicidad tres;}\\ -1, &\quad \text{de multiplicidad uno;}\\ 2, &\quad \text{de multiplicidad dos;}\\ 3+5i, &\quad \text{de multiplicidad dos;}\\ 3-5i, &\quad \text{de multiplicidad dos.}\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general tiene la forma

$$\begin{aligned} y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + (c_5 + c_6x)e^{2x} + \\ e^{3x}(c_7\operatorname{sen}5x + c_8\cos 5x) + xe^{3x}(c_9\operatorname{sen}5x + c_{10}\cos 5x).\end{aligned}$$

EJERCICIOS 4.5

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y''' - y = 0$

2. $y^{(4)} - 16y = 0$

3. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

4. $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$

5. $y^{(4)} + 32y'' + 256y = 0$

6. $y''' - 3y'' - 10y' = 0$

7. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

8. $y''' + y'' + y' - 3y = 0$

9. $y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' + 22y'' - 35y' + 75y = 0$

10. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$ con $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$; $y''(0) = -1$

11. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ con $y(0) = -2$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 2$

12. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$ con $y(0) = 3$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 0$; $y'''(0) = -3$

4.6 Método de Coeficientes Indeterminados: Enfoque de Superposición

Este método nos permite encontrar una solución particular $y_p(x)$ para las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de la forma

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x), \tag{4.29}$$

donde a, b, c son constantes y

$$g(x) = \begin{cases} b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0 & \text{función polinomial} \\ e^{ax} & \text{función exponencial} \\ \operatorname{sen} bx & \text{función seno} \\ \cos bx & \text{función coseno} \end{cases}$$

El método es aplicable también cuando la función $g(x)$ en (4.29) consiste de una suma y productos finitos de funciones polinomiales, exponenciales, seno y coseno. Asimismo, pueden considerarse ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes de orden superior.

El enfoque del método de coeficientes indeterminados que presentamos en esta sección se basa esencialmente en tres principios u observaciones que la práctica de derivación de funciones nos ha enseñado.

1. Cuando derivamos un polinomio, el grado de éste disminuye en uno.

   Si $g(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ entonces $g'(x) = kb_k x^{k-1} + (k-1)b_{k-1}x^{k-2} + \cdots + b_1$. Evidentemente si derivamos dos veces g, su grado disminuye en dos.

2. Al derivar una función exponencial, la función "casi no cambia". Si $g(x) = e^{ax}$ entonces $g'(x) = ae^{ax} = ag(x)$. La derivada es casi la función g (salvo por la constante multiplicativa a).

3. Si derivamos $g(x) = \operatorname{sen} mx$ pasamos al coseno: $g'(x) = m \cos mx$.

   Si derivamos $g(x) = \cos mx$ pasamos al seno: $g'(x) = -m \operatorname{sen} mx$.

   Si derivamos dos veces $g(x) = \operatorname{sen} mx$ regresamos casi a $g(x)$, $g''(x) = -m^2 \operatorname{sen} mx$.

   Si derivamos dos veces $g(x) = \cos mx$ regresamos casi a $g(x)$, $g''(x) = -m^2 \cos mx$.

Luego, es razonable pensar que una solución particular de (4.29) tendrá la misma forma que $g(x)$, excepto cuando g es una solución de la ecuación homogénea.

En esencia, el método consiste en proponer una solución particular de (4.29) que contenga uno o más coeficientes desconocidos. Entonces sustituimos esta solución propuesta en la ecuación diferencial y escogemos los coeficientes de tal manera que la función efectivamente satisfaga la ecuación.

A continuación discutiremos algunos casos para hallar una solución particular de (4.29), dependiendo de la forma de $g(x)$.

CASO I. $g(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

En este caso la ecuación diferencial (4.29) toma la forma

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{4.30}$$

Proponemos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0.$$

Sustituyendo y_p, y_p' y y_p'' en (4.30) resulta

$$a[n(n-1)A_n x^{n-2} + \cdots + 2A_2] + b[nA_n x^{n-1} + \cdots + A_1] +$$
$$c(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

o equivalentemente

$$cA_n x^n + (cA_{n-1} + nbA_n)x^{n-1} + \cdots + (cA_0 + bA_1 + 2aA_2) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{4.31}$$

y comparando coeficientes obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} cA_n &= a_n \\ nbA_n + cA_{n-1} &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ 2aA_2 + bA_1 + cA_0 &= a_0. \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$ de la primera ecuación determinamos A_n y de las restantes los demás coeficientes.

Si $c = 0$ pero $b \neq 0$, el polinomio en el miembro izquierdo de (4.31) es de grado $n-1$ y dicha ecuación no puede satisfacerse. Así que si $c = 0$ proponemos

$$y_p(x) = x(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_2x^2 + A_1x + A_0),$$

y procedemos como antes para determinar $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$. Nótese además que si $c = 0$ una constante es solución de la ecuación diferencial homogénea.

Si tanto $b = 0$ como $c = 0$ (1 y x son soluciones de la homogénea), se propone

$$y_p(x) = x^2(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_2x^2 + A_1x + A_0),$$

aunque ahora la ecuación diferencial puede integrarse directamente.

CASO II. $g(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

Tenemos ahora la euación

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = e^{\alpha x}P_n(x). \tag{4.32}$$

Son posibles los siguientes subcasos.

a) *α no es una raíz de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$.*

En este caso, es preciso hallar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = (A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0)e^{\alpha x} = Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

En efecto, introduciendo y_p, y_p' y y_p'' en (4.32) y dividiendo por $e^{\alpha x}$ se sigue que

$$aQ_n''(x) + (2a\alpha + b)Q_n'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)Q_n(x) = P_n(x). \tag{4.33}$$

Ya que $\operatorname{grad}(Q_n(x)) = n$, $\operatorname{grad}(Q_n'(x)) = n-1$ y $\operatorname{grad}(Q_n''(x)) = n-2$, los polinomios en ambos miembros de (4.33) son de grado n. Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x se obtiene un sistema de $n+1$ ecuaciones que determina los valores de $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$.

b) *α es una raíz simple de la ecuación auxiliar.*

En este caso $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, de modo que en lado izquierdo de (4.33) se tiene un polinomio de grado $n-1$ y dicha igualdad no puede satisfacerse sin importar cuales sean los valores de $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$. Debido a esto, ahora buscamos una solución particular en la forma de un polinomio de grado $n+1$ sin término independiente (pués éste se anula durante la derivación) por $e^{\alpha x}$. Así hacemos

$$y_p(x) = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

c) *α es una raíz doble de la ecuación auxiliar.*

Entonces $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, y $2a\alpha + b = 0$ ($\alpha = -b/2a$ es la raíz doble), de manera que el lado izquierdo de (4.33) se reduce a $aQ_n''(x)$ y para satisfacer la igualdad se requiere buscar una solución particular de la forma de producto de $e^{\alpha x}$ por un polinomio de grado $n+2$. Los términos independiente y lineal se anulan al derivar dos veces, por lo que pueden omitirse en la forma de y_p. Por consiguiente en este caso proponemos

$$y_p(x) = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}.$$

CASO III. $g(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Podemos examinar este caso en forma análoga al caso II, usando que

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} g(x) &= P(x)e^{\alpha x}\left(\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}\right) + Q(x)e^{\alpha x}\left(\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}\right) \\ &= \left[\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x} + \left[\frac{1}{2}P(x) - \frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha-i\beta)x}. \end{aligned}$$

Y considerando de manera independiente las partes real e imaginaria, podemos hallar soluciones que no contengan números complejos de la siguiente forma:

a) Si $\alpha + i\beta$ no es raíz de la ecuación auxiliar, buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \tag{4.34}$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son polinomios cuyo grado es igual al mayor de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$.

b) Si $\alpha + i\beta$ es raíz de la ecuación auxiliar, hacemos

$$y_p(x) = x[u(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x], \tag{4.35}$$

con $u(x)$ y $v(x)$ como antes.

Un caso particular es cuando $g(x)$ tiene la forma

$$g(x) = a\cos\beta x + b\operatorname{sen}\beta x, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

es decir $P(x)$ y $Q(x)$ son de grado cero y $\alpha = 0$. Entonces los resultados anteriores se reducen a los siguientes:

a.1) Si βi no es una raíz de la ecuación auxiliar, buscamos una solución de la forma

$$y_p(x) = A\cos\beta x + B\,\text{sen}\,\beta x$$

b.1) Si βi es una raíz de la ecuación auxiliar, proponemos

$$y_p(x) = x(A\cos\beta x + B\,\text{sen}\,\beta x).$$

Finalmente enfatizamos que las formas propuestas (4.34) y (4.35), para la solución particular, también son válidas cuando $P(x) = 0$ o $Q(x) = 0$ y en el caso particular cuando $a = 0$ o $b = 0$.

EJEMPLO 1. Resolver

$$y'' + 3y' + 2y = 3x^2 - x + 1. \tag{4.36}$$

Solución. De acuerdo con (4.10), la solución general de (4.36) tiene la forma $y = y_c + y_p$, donde y_c es la solución general de la ecuación homogénea

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \tag{4.37}$$

y y_p es una solución particular de (4.36). La ecuación auxiliar de (4.37) es $r^2 + 3r + 2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = -1$ y $r_2 = -2$. Luego

$$y_c(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.$$

Por otra parte, proponemos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

ya que el lado derecho de (4.36) es un polinomio de grado 2 y 0 no es raíz característica. Tenenemos que $y_p' = B + 2Ax$, $y_p'' = 2A$ y sustituyendo en (4.36), resulta

$$\begin{aligned} 2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) &= 3x^2 - x + 1 \\ 2A + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C &= 3x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

Comparando coeficientes en la última igualdad obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2A &= 3 \\ 6A + 2B &= -1 \\ 2A + 3B + 2C &= 1, \end{aligned}$$

del cual se sigue que

$$A = \frac{3}{2}, \qquad B = -5, \qquad C = \frac{13}{2}.$$

Así que

$$y_p(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{13}{2}$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{13}{2}.$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$y'' + 4y' + 4y = e^{3x}. \tag{4.38}$$

Solución. En este caso la ecuación característica es $r^2 + 4r + 4 = 0$ y tiene las raíces $r_1 = r_2 = -2$, por lo que

$$y_c(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$$

es la solución general de la ecuación homogénea $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Buscamos ahora una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ae^{3x}.$$

Al derivar y sustituir en (4.38) tenemos

$$\begin{aligned} 9Ae^{3x} + 12Ae^{3x} + 4Ae^{3x} &= e^{3x} \\ 25Ae^{3x} &= e^{3x}, \end{aligned}$$

por lo cual $A = \dfrac{1}{25}$,

$$y_p(x) = \frac{1}{25}e^{3x}$$

y la solución general de (4.38) es

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{1}{25}e^{3x}.$$

EJEMPLO 3. Resolver

$$y'' + y' = \cos 2x. \tag{4.39}$$

Solución. La ecuación característica $r^2 + r = 0$ tiene por raíces $r_1 = 0$, $r_2 = -1$, por lo que

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-x}.$$

En este caso se propone

$$y_p = A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\, 2x.$$

Sustituyendo y_p, y_p' y y_p'' en (4.39) encontramos que

$$\begin{aligned}(-4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x) + (-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x) &= \cos 2x,\\ (-4A + 2B)\cos 2x + (-2A - 4B)\operatorname{sen} 2x &= \cos 2x,\end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}-4A + 2B &= 1,\\ -2A - 4B &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$A = -\frac{1}{5}, \qquad B = \frac{1}{10}.$$

En consecuencia

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 2x$$

y la solución general de (4.39) es

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 2x.$$

EJEMPLO 4. Resolver

$$y'' + y' + y = xe^x. \tag{4.40}$$

Solución. La ecuación diferencial homogénea tiene la ecuación auxiliar $r^2 + r + 1 = 0$, cuyas raíces son $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Entonces

$$y_c(x) = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Una solución particular de (4.40) tiene que ser un producto de funciones, un polinomio de grado uno por la función exponencial, es decir

$$y_p = (Ax + B)e^x.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}y_p' &= (Ax + B)e^x + Ae^x\\ y_p'' &= (Ax + B)e^x + Ae^x + Ae^x = (Ax + B)e^x + 2Ae^x.\end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.40) resulta

$$\begin{aligned}(Ax + B)e^x + 2Ae^x + (Ax + B)e^x + Ae^x + (Ax + B)e^x &= xe^x\\ 3(Ax + B)e^x + 3Ae^x &= xe^x\\ 3Axe^x + (3A + 3B)e^x &= xe^x.\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} 3A &= 1 \\ 3A + 3B &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{1}{3}.$$

Así

$$y_p(x) = \frac{1}{3}(x-1)e^x$$

y la solución general de (4.40) es

$$y(x) = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{3}(x-1)e^x.$$

EJEMPLO 5. Resolver

$$y'' - y = e^x \operatorname{sen} x. \tag{4.41}$$

Solución. La ecuación auxiliar de la homogénea es $r^2 - 1 = 0$. Luego

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Ahora proponemos

$$y_p = e^x(A\cos x + B\operatorname{sen} x).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x(-A\operatorname{sen} x + B\cos x) + e^x(A\cos x + B\operatorname{sen} x), \\ y_p'' &= e^x(-A\cos x - B\operatorname{sen} x) + 2e^x(-A\operatorname{sen} x + B\cos x) + e^x(A\cos x + B\operatorname{sen} x), \\ y_p'' &= 2e^x(-A\operatorname{sen} x + B\cos x). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.41) hallamos que

$$\begin{aligned} 2e^x(-A\operatorname{sen} x + B\cos x) - e^x(A\cos x + B\operatorname{sen} x) &= e^x \operatorname{sen} x \\ (-A + 2B)\cos x + (-2A - B)\operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} -A + 2B &= 0, \\ -2A - B &= 1. \end{aligned}$$

La solución del sistema es $A = -\dfrac{2}{5}, B = -\dfrac{1}{5}$. Por lo tanto

$$y_p(x) = e^x\left(-\frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\operatorname{sen} x\right),$$

y la solución general de (4.41) es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{5} e^x (2\cos x + \operatorname{sen} x).$$

EJEMPLO 6. Resolver

$$y'' - 9y' = 81x^2 + 7. \tag{4.42}$$

Solución. La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_c(x) = c_1 + c_2 e^{9x}.$$

Como se observa, una constante arbitraria es solución de la ecuación homogénea, o equivalentemente 0 es una raíz simple de la ecuación auxiliar, y de acuerdo con la discusión del caso I una función del tipo $Ax^2 + Bx + C$ no satisface la ecuación no homogénea. Más bien, debemos proponer una solución particular de la forma

$$y_p = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^3 + Bx^2 + Cx, \\ y_p' &= 3Ax^2 + 2Bx + C, \\ y_p'' &= 6Ax + 2B. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.42) resulta

$$\begin{aligned} 6Ax + 2B - 9(3Ax^2 + 2Bx + C) &= 81x^2 + 7 \\ -27Ax^2 + (6A - 18B)x + 2B - 9C &= 81x^2 + 7. \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} -27A &= 81, \\ 6A - 18B &= 0, \\ 2B - 9C &= 7, \end{aligned}$$

de donde $A = -3, B = -1, C = -1$ y entonces

$$y_p = -3x^3 - x^2 - x.$$

En consecuencia la solución general de (4.42) es

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{9x} - 3x^3 - x^2 - x.$$

EJEMPLO 7. Resolver

$$4y'' + 4y' + y = e^{-x/2}. \tag{4.43}$$

Solución. Primeramente nótese que la ecuación auxiliar de la ecuación homogénea es

$$(2r+1)^2 = 0,$$

de modo que su solución general es

$$y_c(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x/2}.$$

Como $-1/2$ es una raíz doble de la ecuación auxiliar, y en consecuencia $Ae^{-x/2}, Axe^{-x/2}$ son soluciones de la ecuación homogénea para cualquier constante A, proponemos una solución particular de la forma

$$y_p = Ax^2e^{-x/2},$$

según se vió en el caso II-(c). Luego

$$\begin{aligned}
y_p' &= -\frac{A}{2}x^2e^{-x/2} + 2Axe^{-x/2},\\
y_p'' &= \frac{A}{4}x^2e^{-x/2} - Axe^{-x/2} - Axe^{-x/2} + 2Ae^{-x/2},\\
y_p'' &= \frac{A}{4}x^2e^{-x/2} - 2Axe^{-x/2} + 2Ae^{-x/2}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.43) resulta

$$\begin{aligned}
4(\frac{A}{4}x^2e^{-x/2} - 2Axe^{-x/2} + 2Ae^{-x/2}) + 4(-\frac{A}{2}x^2e^{-x/2} + 2Axe^{-x/2}) + Ax^2e^{-x/2} &= e^{-x/2}\\
(Ax^2 - 8Ax + 8A - 2Ax^2 + 8Ax + Ax^2)e^{-x/2} &= e^{-x/2}\\
8Ae^{-x/2} &= e^{-x/2}\\
8A &= 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $A = \dfrac{1}{8}$,

$$y_p = \frac{1}{8}x^2e^{-x/2},$$

y la solución general de (4.43) es

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x/2} + \frac{1}{8}x^2e^{-x/2}.$$

EJEMPLO 8. Resolver

$$y'' + 25y = 10\,\mathrm{sen}\,5x. \tag{4.44}$$

Solución. Las raíces de la ecuación auxiliar son $\pm 5i$, así que

$$y_c(x) = c_1\cos 5x + c_2\,\mathrm{sen}\,5x.$$

y ahora proponemos una solución particular de la forma

$$y_p = x(A\cos 5x + B\,\mathrm{sen}\,5x),$$

como se estableció en el caso III-(b.1). Se tiene que

$$\begin{aligned} y_p' &= x(-5A\,\mathrm{sen}\,5x + 5B\cos 5x) + (A\cos 5x + B\,\mathrm{sen}\,5x), \\ y_p'' &= x(-25A\cos 5x - 25B\,\mathrm{sen}\,5x) + (-5A\,\mathrm{sen}\,5x + 5B\cos 5x) + \\ &\quad (-5A\,\mathrm{sen}\,5x + 5B\cos 5x) \\ &= x(-25A\cos 5x - 25B\,\mathrm{sen}\,5x) + 2(-5A\,\mathrm{sen}\,5x + 5B\cos 5x). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.44) resulta

$$\begin{aligned} x(-25A\cos 5x - 25B\,\mathrm{sen}\,5x) + 2(-5A\,\mathrm{sen}\,5x + 5B\cos 5x) + & \\ 25(A\cos 5x + B\,\mathrm{sen}\,5x) &= 10\,\mathrm{sen}\,5x \\ -10A\,\mathrm{sen}\,5x + 10B\cos 5x &= 10\,\mathrm{sen}\,5x. \end{aligned}$$

Por consiguiente $A = -1, B = 0$,

$$y_p = -x\cos 5x$$

y la solución general de (4.44) es

$$y(x) = c_1\cos 5x + c_2\,\mathrm{sen}\,5x - x\cos 5x.$$

A continuación enunciaremos una propiedad de las ecuaciones diferenciales lineales que nos permitirá resolver ecuaciones no homogéneas, cuyo lado derecho es más general.

Teorema 4.6.1 (Principio de Superposición.) *Si y_{p_1} es una solución particular de de la ecuación diferencial*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x),$$

y y_{p_2} es una solución particular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_2(x),$$

entonces $y_{p_1} + y_{p_2}$ es una solución particular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x).$$

EJEMPLO 9. Resolver

$$y'' + 6y' + 8y = 3e^{5x} + x^2 - 1. \tag{4.45}$$

Solución. Claramente la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_c(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x}.$$

Una solución particular de

$$y'' + 6y' + 8y = 3e^{5x}, \tag{4.46}$$

tiene la forma

$$y_{p_1} = Ae^{5x}.$$

Derivando y sustituyendo en (4.46) se obtiene

$$\begin{aligned} 25Ae^{5x} + 30Ae^{5x} + 8Ae^{5x} &= 3e^{5x} \\ 63Ae^{5x} &= 3e^{5x}, \end{aligned}$$

de donde $A = \dfrac{1}{21}$ y entonces

$$y_{p_1} = \frac{1}{21}e^{5x}.$$

Por otra parte, una solución particular de

$$y'' + 6y' + 8y = x^2 - 1, \tag{4.47}$$

es de la forma

$$y_{p_2} = Ax^2 + Bx + C,$$

que al derivar y sustituir en (4.47) nos conduce a

$$\begin{aligned} 2A + 6(2Ax + B) + 8(Ax^2 + Bx + C) &= x^2 - 1 \\ 8Ax^2 + (12A + 8B)x + (2A + 6B + 8C) = x^2 - 1. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las respectivas potencias de x se sigue

$$\begin{aligned} 8A &= 1, \\ 12A + 8B &= 0, \\ 2A + 6B + 8C &= -1, \end{aligned}$$

por lo cual hallamos que

$$A = \frac{1}{8}, \qquad B = -\frac{3}{16}, \qquad C = -\frac{1}{64}$$

y

$$y_{p_2} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{1}{64}.$$

Por el principio de superposición, una solución particular de (4.45) es $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, es decir

$$y_p(x) = \frac{1}{21}e^{5x} + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{1}{64}.$$

Por lo tanto la solución general de (4.45) es

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{21}e^{5x} + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{1}{64}.$$

EJEMPLO 10. Resolver

$$y'' - 2y' - 3y = xe^{3x} + \operatorname{sen} x. \tag{4.48}$$

Solución. La ecuación auxiliar de la ecuación diferencial homogénea es $r^2 - 2r - 3 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 3, r_2 = -1$, por lo cual

$$y_c(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Una solución particular de

$$y'' - 2y' - 3y = xe^{3x} \tag{4.49}$$

tiene la forma

$$y_{p_1} = x(Ax + B)e^{3x},$$

puesto que 3 es una raíz característica simple (ver Caso II-(b)). Luego

$$\begin{aligned}
y_{p_1} &= (Ax^2 + Bx)e^{3x}, \\
y'_{p_1} &= 3(Ax^2 + Bx)e^{3x} + (2Ax + B)e^{3x}, \\
y''_{p_1} &= 9(Ax^2 + Bx)e^{3x} + 6(2Ax + B)e^{3x} + 2Ae^{3x},
\end{aligned}$$

y sustituyendo en (4.49) se sigue que

$$\begin{aligned}
9(Ax^2 + Bx)e^{3x} + 6(2Ax + B)e^{3x} + 2Ae^{3x} & \\
-6(Ax^2 + Bx)e^{3x} - 2(2Ax + B)e^{3x} - 3(Ax^2 + Bx)e^{3x} &= xe^{3x} \\
4(2Ax + B)e^{3x} + 2Ae^{3x} &= xe^{3x} \\
(8Ax + 2A + 4B)e^{3x} &= xe^{3x} \\
8Ax + 2A + 4B &= x,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
8A &= 1, \\
2A + 4B &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema hallamos que $A = \dfrac{1}{8}, B = -\dfrac{1}{16}$ y entonces

$$y_{p_1} = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{3x}.$$

Por otro lado, una solución particular de

$$y'' - 2y' - 3y = \operatorname{sen} x, \tag{4.50}$$

es de la forma

$$y_{p_2} = A\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Derivando

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= -A\operatorname{sen} x + B\cos x, \\ y''_{p_2} &= -A\cos x - B\operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

y sustituyendo en (4.50) se obtiene

$$\begin{aligned} -A\cos x - B\operatorname{sen} x - 2(-A\operatorname{sen} x + B\cos x) - 3(A\cos x + B\operatorname{sen} x) &= \operatorname{sen} x \\ (-4A - 2B)\cos x + (2A - 4B)\operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} -4A - 2B &= 0, \\ 2A - 4B &= 1, \end{aligned}$$

Así, $A = \frac{1}{10}, B = -\frac{1}{5}$, y

$$y_{p_2} = \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\operatorname{sen} x.$$

Por el principio de superposición, una solución particular de (4.48) es

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{3x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\operatorname{sen} x.$$

Por consiguiente la solución general de (4.48) es

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{3x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{1}{5}\operatorname{sen} x.$$

4.7 Método de Coeficientes Indeterminados: Enfoque del Operador Anulador

4.7.1 Operadores Diferenciales

La derivada de orden n $\frac{d^ny}{dx^n}$, también se denota por D^ny. De modo que la ecuación diferencial

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x),$$

puede escribirse en la forma

$$a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + ... + a_1Dy + a_0y = g(x)$$

o bien

$$(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0)y = g(x). \tag{4.51}$$

La expresión

$$P(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0 \tag{4.52}$$

se llama **Operador Diferencial de Orden n**. Nótese que $P(D)$ es un polinomio en el símbolo D y que es posible expresar la ecuación (4.51) en la forma compacta

$$P(D)y = g(x).$$

Si los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ en (4.52) son números reales, entonces $P(D)$ tiene las siguientes propiedades.

1. $P(D)$ se puede factorizar como un producto de operadores diferenciales de orden 1 y operadores diferenciales de orden 2 que son irreducibles, con coeficientes reales.

2. Los factores de $P(D)$ pueden conmutarse.

3. $P(D)(f+g) = P(D)f + P(D)g$, para cualesquier funciones f y g que sean al menos n veces derivables.

EJEMPLO 1. Factorice si es posible.
a) $P(D) = D^2 + 5D + 6$
b) $P(D) = D^2 + D + 1$
c) $P(D) = D^3 + 4D^2 + 3D$
d) $P(D) = D^3 + 4D$
e) $P(D) = D^4 - 8D^2 + 16$

Solución.
a) $P(D) = (D + 2)(D + 3)$.
b) Es un operador cuadrático irreducible.
c) $P(D) = D(D^2 + 4D + 3) = D(D + 1)(D + 3)$.
d) $P(D) = D(D^2 + 4)$.
e) $P(D) = (D^2 - 4)^2 = [(D + 2)(D - 2)]^2 = (D + 2)^2(D - 2)^2$.

Definición 4.7.1 *Sea $y = f(x)$ una función que tiene al menos n derivadas. Si*

$$(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ...a_1D + a_0)f(x) = 0$$

entonces decimos que el operador diferencial $P(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0$ ***anula a*** *f.*

Observe que la definición 4.7.1 es equivalente a decir que la función f es solución de la ecuación diferencial $P(D)y = 0$.

Al operador diferencial del tipo (4.52) con $a_n = 1$ (mónico) y de menor orden posible que anula a f le llamaremos el **operador anulador** de f.

Los siguientes resultados nos dicen como encontrar el operador anulador para algunas funciones y están basados en nuestros conocimientos sobre las soluciones de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

Proposición 4.7.1 *El operador diferencial D^n anula a cada una de las funciones*

$$1, x, x^2, ..., x^{n-1}.$$

Más generalmente, la función polinomial $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$ es anulada por el operador D^n con $n \geq k+1$.

EJEMPLO 2. Encuentre el operador anulador $P_1(D)$ de la función dada.
a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x^5 - 2x + 1$
c) $f(x) = x^4(1 + 2x - 3x^2)$

Solución.
a) $P_1(D) = D^4$.
b) $P_1(D) = D^6$.
c) $P_1(D) = D^7$.

Proposición 4.7.2 *El operador diferencial $(D - \alpha)^k$ anula a cada una de las funciones*

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2 e^{\alpha x}, ..., x^{k-1}e^{\alpha x}.$$

EJEMPLO 3. Hallar el operador anulador $P_1(D)$ de la función indicada.
a) $f(x) = e^{7x}$
b) $f(x) = 3e^{-4x} + 2xe^{-4x}$
c) $h(x) = e^{2x} + 5xe^{-3x}$
d) $g(x) = x - 7xe^{6x}$
e) $f(x) = (2 - e^x)^2$

Solución.
a) Tomando $\alpha = 7$, $k = 1$ en la proposición 4.7.2, tenemos que $P_1(D) = D - 7$.
b) Ahora, $\alpha = -4$ y $k = 2$ de modo que $P_1(D) = (D+4)^2$.
c) Se tiene que $(D-2)e^{2x} = 0$ y $(D+3)^2 5xe^{-3x} = 0$. Entonces el producto $P_1(D) = (D-2)(D+3)^2$ es el anulador de h. En efecto

$$\begin{aligned}
P_1(D)h(x) &= (D-2)(D+3)^2(e^{2x} + 5xe^{-3x}) \\
&= (D+3)^2(D-2)e^{2x} + 5(D-2)(D+3)^2 xe^{-3x} \\
&= (D+3)^2(0) + 5(D-2)(D-2)(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

d) Para esta función aplicamos las proposiciones 4.7.1 y 4.7.2. En primer lugar $D^2x = 0$ y por otra parte $(D-6)^2 7xe^{6x} = 0$. Por lo tanto $P_1(D) = D^2(D-6)^2$.
e) La función f dada no es de los tipos mencionados en las proposiciones anteriores. Sin embargo, $f(x) = 4 - 4e^x + e^{2x}$ y ya que $D4 = 0$, $(D-1)4e^x = 0$, $(D-2)e^{2x} = 0$ concluimos que $P_1(D) = D(D-1)(D-2)$.

Proposición 4.7.3 *El operador diferencial* $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^k$ *anula a cada una de las funciones*

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

En particular, si en la proposición 4.7.3, consideramos $\alpha = 0$ y $k = 1$, se sigue que

$$\begin{aligned}(D^2+\beta^2)\cos\beta x &= 0,\\ (D^2+\beta^2)\operatorname{sen}\beta x &= 0.\end{aligned}$$

Ejemplo 4. Obtenga el operador anulador $P_1(D)$ de la función dada
a) $f(x) = 2e^x\cos 3x - e^x\operatorname{sen} 3x$
b) $g(x) = 2e^x\cos 3x + xe^x\cos 3x - e^x\operatorname{sen} 3x$
c) $h(x) = 4 + 3x - 5\cos 2x$
d) $f(x) = 8x^3 - \operatorname{sen} x + 10\cos 5x$
e) $g(x) = x^2e^{-x}\operatorname{sen} x - 6e^{2x}\cos 3x$

Solución.
a) En la proposición 4.7.3 usamos los valores de $\alpha = 1$, $\beta = 3$ y $k = 1$ para encontrar $P_1(D) = D^2 - 2D + 10$.
b) Igual que en el inciso anterior, $\alpha = 1$ y $\beta = 3$, pero ahora $k = 2$. Entonces $P_1(D) = (D^2 - 2D + 10)^2$.
c) Aplicando la proposición 4.7.1 se tiene que $D^2(4 + 3x) = 0$. Mientras que, de la proposición 4.7.3 con $\alpha = 0$ y $\beta = 2$, se sigue que $(D^2 + 4)(5\cos 2x) = 0$. Por lo tanto $P_1(D) = D^2(D^2 + 4)$.
d) De las proposiciones 4.7.1 y 4.7.3 tenemos que

$$D^4(8x^3) = 0, \quad (D^2+1)\operatorname{sen} x = 0, \quad (D^2+25)10\cos 5x = 0.$$

Por consiguiente $P_1(D) = D^4(D^2 + 1)(D^2 + 25)$.
e) Aplicamos la proposición 4.7.3 primero on $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $k = 3$ y luego con $\alpha = 2$, $\beta = 3$ y $k = 1$, para obtener

$$\begin{aligned}(D^2+2D+2)^3(x^2e^{-x}\operatorname{sen} x) &= 0\\ (D^2-4D+13)(6e^{2x}\cos 3x) &= 0,\end{aligned}$$

de manera que el operador anulador en este caso viene dado por

$$P_1(D) = (D^2+2D+2)^3(D^2-4D+13).$$

4.7.2 Método de los Coeficientes Indeterminados

Consideremos la ecuación diferencial no homogénea

$$P(D)y = g(x), \tag{4.53}$$

donde $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ es un operador diferencial con coeficientes constantes y $g(x)$ es

a) un polinomio en x,

b) una función exponencial $e^{\alpha x}$,

c) $\operatorname{sen} \beta x$, $\cos \beta x$ ó

d) sumas finitas y productos de las funciones mencionadas en (a), (b) y (c).

En este caso siempre es posible encontrar el operador anulador $P_1(D)$ de $g(x)$. Aplicando $P_1(D)$ a (4.53) resulta

$$P_1(D)P(D)y = P_1(D)g(x) = 0. \tag{4.54}$$

Resolviendo la ecuación diferencial homogénea (4.54) es posible descubrir la forma de una solución particular y_p de la ecuación diferencial no homogénea (4.53). Los siguientes ejemplos esclarecerán el procedimiento a seguir.

EJEMPLO 1. Resolver

$$y'' - 2y' + y = x^2 + 4x. \tag{4.55}$$

Solución. Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

De la ecuación característica $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, se obtiene la solución complementaria

$$y_c = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

Ahora bien, el operador anulador de la función $g(x) = x^2 + 4x$ que figura en el lado derecho de la ecuación diferencial (4.55) es $P_1(D) = D^3$; es decir

$$D^3(x^2 + 4x) = 0.$$

Aplicando $P_1(D) = D^3$ a (4.55), obtenemos la ecuación homogénea

$$D^3(D^2 - 2D + 1)y = D^3(x^2 + 4x) = 0. \tag{4.56}$$

La ecuación característica de (4.56) es

$$r^3(r^2 - 2r + 1) = 0$$

o bien

$$r^3(r-1)^2 = 0$$

y por lo tanto su solución general es

$$y = (k_1 + k_2 x)e^x + k_3 + k_4 x + k_5 x^2, \tag{4.57}$$

donde $k_1, k_2, \ldots, k_5$ son constantes arbitrarias.

Es posible argumentar que toda solución de (4.56) es también una solución de (4.55). Dado que la solución complementaria $y_c = (c_1 + c_2 x)e^x$ aparece como parte de la solución de (4.56), los términos restantes en (4.57) deben ser la estructura básica de y_p

$$y_p = A + Bx + Cx^2. \tag{4.58}$$

Para simplificar la notación hemos reemplazado k_3, k_4 y k_5 por A, B y C respectivamente. Finalmente, calcularemos los valores A, B y C de modo que (4.58) sea en efecto una solución de la ecuación diferencial (4.55).

Tenemos que

$$\begin{aligned} y_p' &= B + 2Cx, \\ y_p'' &= 2C. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.55) resulta

$$2C - 2(B + 2Cx) + (A + Bx + Cx^2) = x^2 + 4x.$$

Equivalentemente

$$Cx^2 + (B - 4C)x + A - 2B + 2C = x^2 + 4x.$$

Igualando coeficientes en la última identidad, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} A - 2B + 2C &= 0, \\ B - 4C &= 4, \\ C &= 1. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, resulta $A = 14$, $B = 8$ y $C = 1$. En consecuencia

$$y_p = 14 + 8x + x^2.$$

La solución general de (4.55) es $y = y_c + y_p$, o sea

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + 14 + 8x + x^2.$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$y'' - 2y' - 8y = 16e^{2x} - 21e^{-3x}. \tag{4.59}$$

Solución. La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea asociada a (4.59) es $r^2 - 2r - 8 = (r-4)(r+2) = 0$, así que

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2e^{4x}.$$

Note que la ecuación diferencial (4.59) puede escribirse como

$$(D-4)(D+2)y = 16e^{2x} - 21e^{-3x}. \tag{4.60}$$

El operador anulador de la función $g(x) = 16e^{2x} - 21e^{-3x}$ es

$$P_1(D) = (D-2)(D+3)$$

y al aplicarlo a ambos miembros de (4.60) resulta

$$(D-2)(D+3)(D-4)(D+2)y = 0. \tag{4.61}$$

La ecuación característica de (4.61) es

$$(r-2)(r+3)(r-4)(r+2) = 0.$$

Por consiguiente

$$y = k_1e^{2x} + k_2e^{-3x} + k_3e^{4x} + k_4e^{-2x}.$$

Proponemos una solución particular de la forma

$$y_p = Ae^{2x} + Be^{-3x}.$$

Sustituyendo y_p, y_p', y_p'' en (4.59) y simplificando, obtenemos

$$-8Ae^{2x} + 7Be^{-3x} = 16e^{2x} - 21e^{-3x}.$$

Igualando coeficientes, se sigue que

$$\begin{aligned} -8A &= 16, \\ 7B &= -21. \end{aligned}$$

Encontramos $A = -2,\ B = -3$ y por lo tanto

$$y_p = -2e^{2x} - 3e^{-3x}.$$

La solución general de (4.59) es entonces

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{4x} - 2e^{2x} - 3e^{-3x}.$$

EJEMPLO 3. Resuelve

$$y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x. \tag{4.62}$$

Solución. Podemos escribir (4.62) como

$$(D^2 - 2D + 3)y = e^{-x} \cos x. \tag{4.63}$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea asociada es $r^2 - 2r + 3 = 0$, cuyas raíces son $1 \pm \sqrt{2}i$. Luego

$$y_c(x) = e^x (c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \text{sen}\, \sqrt{2}x).$$

El operador anulador de la función en el lado derecho de (4.62) es

$$P_1(D) = D^2 + 2D + 2.$$

Aplicando $P_1(D)$ a (4.63) obtenemos

$$(D^2 + 2D + 2)(D^2 - 2D + 3)y = 0. \tag{4.64}$$

La ecuación característica de (4.64) es $(r^2 + 2r + 2)(r^2 - 2r + 3) = 0$ y las raíces son $1 \pm \sqrt{2}i$, $-1 \pm i$ de multiplicidad uno, por lo cual

$$y = e^x (k_1 \cos \sqrt{2}x + k_2 \text{sen}\, \sqrt{2}x) + e^{-x}(k_3 \cos x + k_4 \text{sen}\, x).$$

Luego

$$y_p = e^{-x}(A \cos x + B \text{sen}\, x).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} y_p' &= -e^{-x}(A \cos x + B \text{sen}\, x) + e^{-x}(-A \text{sen}\, x + B \cos x), \\ y_p'' &= e^{-x}(-2B \cos x + 2A \text{sen}\, x). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.62) y simplificando, resulta

$$e^{-x}[(5A - 4B) \cos x + (4A + 5B) \text{sen}\, x] = e^{-x} \cos x.$$

Comparando coeficientes, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 5A - 4B &= 1, \\ 4A + 5B &= 0, \end{aligned}$$

de donde $A = \dfrac{5}{41}$, $B = -\dfrac{4}{41}$ y en consecuencia

$$y_p(x) = e^{-x}\left(\frac{5}{41} \cos x - \frac{4}{41} \text{sen}\, x\right).$$

La solución general de (4.62) es

$$y = e^{x}(c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}x) + e^{-x}(\frac{5}{41}\cos x - \frac{4}{41}\operatorname{sen} x).$$

EJEMPLO 4. Resuelve

$$y'' + 3y' - 10y = x(e^{2x} + 1). \tag{4.65}$$

Solución. Escribimos la ecuación diferencial como

$$(D^2 + 3D - 10)y = x(e^{2x} + 1)$$

o bien

$$(D + 5)(D - 2)y = x(e^{2x} + 1). \tag{4.66}$$

Se ve que

$$y_c(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x}.$$

Ahora bien, sabemos que $D^2 x = 0$, $(D-2)^2(xe^{2x}) = 0$. Por consiguiente el operador anulador de la función $g(x) = x(e^{2x} + 1) = xe^{2x} + x$, es $P_1(D) = D^2(D-2)^2$. Aplicando $P_1(D)$ a ambos miembros de (4.66) se obtiene

$$D^2(D + 5)(D - 2)^3 y = 0. \tag{4.67}$$

La ecuación característica de (4.67) es $r^2(r+5)(r-2)^3 = 0$ y sus raíces son 0, -5 y 2 de multiplicidades dos, uno y tres, respectivamente. Luego

$$y = k_1 + k_2 x + k_3 e^{-5x} + (k_4 + k_5 x + k_6 x^2)e^{2x}.$$

Excluyendo en esta expresión la combinación lineal de términos correspondientes a y_c, se llega a la forma de y_p

$$y_p = A + Bx + (Cx + Ex^2)e^{2x}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} y_p' &= B + (C + 2Ex)e^{2x} + 2(Cx + Ex^2)e^{2x}, \\ y_p'' &= 2Ee^{2x} + 4(C + 2Ex)e^{2x} + 4(Cx + Ex^2)e^{2x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.65) y simplificando, resulta

$$(-10A + 3B) - 10Bx + (7C + 2E)e^{2x} + 14Exe^{2x} = xe^{2x} + x.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} -10A + 3B &= 0, \\ -10B &= 1, \\ 7C + 2E &= 0, \\ 14E &= 1. \end{aligned}$$

Así que $A=-\dfrac{3}{100}$, $B=-\dfrac{1}{10}$, $C=-\dfrac{1}{49}$, $E=\dfrac{1}{14}$ y la solución general de (4.65) es

$$y=c_1e^{-5x}+c_2e^{2x}-\frac{3}{100}-\frac{1}{10}x+(\frac{1}{14}x^2-\frac{1}{49}x)e^{2x}.$$

EJEMPLO 5. Resuelve

$$y''-2y'+5y=e^x\cos 2x+e^x\text{sen}\,2x. \tag{4.68}$$

Solución. La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea asociada es $r^2-2r+5=0$ y sus raíces son $1\pm 2i$, de modo que

$$y_c(x)=e^x(c_1\cos 2x+c_2\text{sen}\,2x).$$

Nótese entonces que el operador anulador del lado derecho es precisamente $P_1(D)=D^2-2D+5$. En consecuencia

$$(D^2-2D+5)(D^2-2D+5)y=0$$

o bien

$$(D^2-2D+5)^2y=0.$$

Las raíces de la ecuación característica de esta última ecuación diferencial homogénea son $1\pm 2i$, de multiplicidad dos. De ésto deducimos que

$$y=e^x(k_1\cos 2x+k_2\text{sen}\,2x)+xe^x(k_3\cos 2x+k_4\text{sen}\,2x).$$

Sustituyendo

$$y_p=xe^x(A\cos 2x+B\text{sen}\,2x)$$

en (4.68) y simplificando obtenemos

$$e^x(4B\cos 2x-4A\text{sen}\,2x)=e^x\cos 2x+e^x\text{sen}\,2x.$$

Igualando coeficientes resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} -4A &= 1,\\ 4B &= 1, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $A=-\dfrac{1}{4}$ y $B=\dfrac{1}{4}$. Por lo tanto la solución general de (4.68) es

$$y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\text{sen}\,2x)+\frac{x}{4}e^x(\text{sen}\,2x-\cos 2x).$$

EJEMPLO 6. Resuelve

$$y''+2y'+y=-3e^{-x}+8xe^{-x}+1. \tag{4.69}$$

Solución. Escribimos la ecuación diferencial (4.69) en la forma

$$(D+1)^2y = -3e^{-x} + 8xe^{-x} + 1. \tag{4.70}$$

Luego

$$y_c(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x}.$$

Se tiene que $(D+1)^2(-3e^{-x}+8xe^{-x}) = 0$ y $D(1) = 0$. Por consiguiente $P_1(D) = D(D+1)^2$ es el operador anulador de la función $g(x) = -3e^{-x} + 8xe^{-x} + 1$. Aplicamos $P_1(D)$ a (4.70) para obtener.

$$D(D+1)^4y = 0. \tag{4.71}$$

La ecuación característica de (4.71) es $r(r+1)^4 = 0$ y sus raíces son 0 y -1 de multiplicidades uno y cuatro, respectivamente. Por consiguiente

$$y = k_1 + (k_2 + k_3x + k_4x^2 + k_5x^3)e^{-x}.$$

Así , una solución particular de (4.69) tiene la forma

$$y_p = A + (Bx^2 + Cx^3)e^{-x}.$$

Sustituyendo y_p en (4.69), resulta

$$A + 2Be^{-x} + 6Cxe^{-x} = -3e^{-x} + 8xe^{-x} + 1,$$

de donde $A = 1$, $B = -\dfrac{3}{2}$ y $C = \dfrac{4}{3}$, de modo que la solución general de (4.69) es

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + (\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2)e^{-x} + 1.$$

EJEMPLO 7. Resuelve

$$y'' + 4y = 3x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x. \tag{4.72}$$

Solución. La ecuación (4.72) puede escribirse como

$$(D^2 + 4)y = 3x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x. \tag{4.73}$$

Es claro que

$$y_c(x) = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x.$$

Además $P_1(D) = (D^2+4)^2$ es el operador anulador de la función $g(x) = 3x\cos 2x + \operatorname{sen} 2x$. Aplicamos $P_1(D)$ a (4.73) para obtener

$$(D^2 + 4)^3y = 0. \tag{4.74}$$

Las raíces de la ecuación característica de (4.74) son $\pm 2i$ de multiplicidad tres, por lo que

$$y = k_1 \cos 2x + k_2 \operatorname{sen} 2x + x(k_3 \cos 2x + k_4 \operatorname{sen} 2x) + x^2(k_5 \cos 2x + k_6 \operatorname{sen} 2x).$$

Luego, buscamos una solución particular de la forma

$$y_p = x(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) + x^2(C \cos 2x + E \operatorname{sen} 2x).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} y_p' &= (A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) + 2x(-A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x) + 2x(C \cos 2x + E \operatorname{sen} 2x) \\ &\quad + 2x^2(-C \operatorname{sen} 2x + E \cos 2x), \\ y_p'' &= 4(-A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x) - 4x(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) + 2(C \cos 2x + E \operatorname{sen} 2x) \\ &\quad + 8x(-C \operatorname{sen} 2x + E \cos 2x) - 4x^2(C \cos 2x + E \operatorname{sen} 2x). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.72), resulta

$$(4B + 2C) \cos 2x + (2E - 4A) \operatorname{sen} 2x - 8Cx \operatorname{sen} 2x + 8Ex \cos 2x = 3x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x.$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4B + 2C &= 0, \\ 2E - 4A &= 1, \\ -8C &= 0, \\ 8E &= 3, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $A = -\dfrac{1}{16}$, $B = 0$, $C = 0$, $E = \dfrac{3}{8}$. Por lo tanto la solución general de (4.72) es

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16} x \cos 2x + \frac{3}{8} x^2 \operatorname{sen} 2x.$$

EJEMPLO 8. Determine la forma de una solución particular de

$$y'' + 6y' + 13y = xe^{-3x} \operatorname{sen} 2x + x^2 e^{-2x} \operatorname{sen} 3x + 6. \tag{4.75}$$

Solución. La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea asociada a (4.75) es $r^2 + 6r + 13 = 0$, cuyas raíces son $-3 \pm 2i$. En consecuencia

$$y_c = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x).$$

Ahora bien, tenemos que $(D^2+6D+13)^2(xe^{-3x} \operatorname{sen} 2x) = 0$, $(D^2+4D+13)^3(x^2 e^{-2x} \operatorname{sen} 3x) = 0$ y $D(6) = 0$, por lo cual el operador anulador de $g(x) = xe^{-3x} \operatorname{sen} 2x + x^2 e^{-2x} \operatorname{sen} 3x + 6$ es

$$P_1(D) = (D^2 + 6D + 13)^2 (D^2 + 4D + 13)^3 D.$$

Al aplicar $P_1(D)$ a (4.75) resulta

$$D(D^2+4D+13)^3(D^2+6D+13)^3y=0. \tag{4.76}$$

Puesto que las raíces de la ecuación característica de (4.76) son $-3\pm 2i$, $-2\pm 3i$ y 0 de multiplicidad tres, tres y uno, respectivamente. Concluimos que

$$\begin{aligned} y &= e^{-3x}(k_1\cos 2x+k_2\operatorname{sen}2x)+xe^{-3x}(k_3\cos 2x+k_4\operatorname{sen}2x)\\ &\quad +x^2e^{-3x}(k_5\cos 2x+k_6\operatorname{sen}2x)+e^{-2x}(k_7\cos 3x+k_8\operatorname{sen}3x)\\ &\quad xe^{-2x}(k_9\cos 3x+k_{10}\operatorname{sen}3x)+x^2e^{-2x}(k_{11}\cos 3x+k_{12}\operatorname{sen}3x)+k_{13}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se puede encontrar una solución particular de (4.75) que tiene la forma

$$\begin{aligned} y_p &= xe^{-3x}(A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x)+x^2e^{-3x}(C\cos 2x+E\operatorname{sen}2x)\\ &+ e^{-2x}(F\cos 3x+G\operatorname{sen}3x)+xe^{-2x}(H\cos 3x+I\operatorname{sen}3x)\\ &+ x^2e^{-2x}(J\cos 3x+K\operatorname{sen}3x)+L. \end{aligned}$$

EJEMPLO 9. Determinar la forma de una solución particular de

$$y'''-5y''+y'-5y=x^2-3+x^3e^{5x}-3x\operatorname{sen}x. \tag{4.77}$$

Solución. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es

$$r^3-5r^2+r-5=0$$

o bien

$$(r^2+1)(r-5)=0.$$

De modo que

$$y_c=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+c_3e^{5x}.$$

La ecuación diferencial (4.77) puede escribirse como

$$(D^2+1)(D-5)y=x^2-3+x^3e^{5x}-3x\operatorname{sen}x. \tag{4.78}$$

El operador anulador de la función en el lado derecho de (4.77) es

$$P_1(D)=D^3(D-5)^4(D^2+1)^2.$$

Aplicando $P_1(D)$ a (4.78) obtenemos

$$D^3(D^2+1)^3(D-5)^5y=0. \tag{4.79}$$

Ahora, la ecuación característica de (4.79) es $r^3(r^2+1)^3(r-5)^5 = 0$ y sus raíces son 0, $\pm i$ y 5 de multiplicidad tres, tres y cinco, respectivamente. Por consiguiente

$$\begin{aligned} y &= k_1 + k_2x + k_3x^2 + (k_4 + k_5x + k_6x^2 + k_7x^3 + k_8x^4)e^{5x} \\ &+ (k_9 + k_{10}x + k_{11}x^2)\cos x + (k_{12} + k_{13}x + k_{14}x^2)\operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

y una solución particular de (4.77) es de la forma

$$\begin{aligned} y_p &= A + Bx + Cx^2 + (Ex + Fx^2 + Gx^3 + Hx^4)e^{5x} \\ &+ (Ix + Jx^2)\cos x + (Kx + Lx^2)\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

EJERCICIOS 4.7

En los problemas 1-6 factorice el operador diferencial dado, cuando sea posible

1. $16D^2 - 9$
2. $D^2 - 11D + 24$
3. $D^3 + 12D^2 + 36D$
4. $D^3 - 5D^2 + 2D + 8$
5. $D^4 + 64D$
6. $D^4 + 14D + 49$

En los problemas 7-15 encuentre el operador anulador de la función dada

7. $7 + 8x - 5x^2$
8. $x^9(1 + 4x)$
9. $6 - 11e^{4x}$
10. $9x + 5xe^{10x}$
11. $3 + x - 6x^2 - \cos 9x + 2\operatorname{sen} 9x$
12. $6x + \cos 2x + 21\operatorname{sen} 7x$
13. $e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x$
14. $5 + e^{3x}\operatorname{sen} 4x$

15. $e^{-2x}\cos 3x - e^{6x}\operatorname{sen} 3x + e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$

    En los problemas 16-49 resuelva la ecuación diferencial dada, por el método de los coeficientes indeterminados

16. $y'' + 8y' + 7y = 32e^{x} - 27e^{2x}$
17. $y'' - 2y' + y = 10\cos x + 8\operatorname{sen} x$
18. $y'' - 2y' + 17y = 289x^2 + 9$
19. $y'' + 8y' = 64x$
20. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$
21. $y'' + 4y' + 3y = 4e^{-3x} + 18x + 15$
22. $y'' + 10y' + 25y = (2 + 6x)e^{-5x}$
23. $y'' + 3y' = 36xe^{-3x} - 9e^{-3x} + 7$
24. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$
25. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$
26. $y'' + y' + y = (x + x^2)e^{x}$
27. $y'' + 4y' - 2y = 8\operatorname{sen} 2x$
28. $y'' + y = 8\operatorname{sen} x + 4\cos x + 1$
29. $y'' + y = 4x\cos x$
30. $y'' + y = 2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$
31. $y'' + y' = \cos^2 x + e^{x} + x^2$
32. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}(\operatorname{sen} x + 2\cos x)$
33. $y'' - 4y' + 4y = 4x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$
34. $y'' + 2y' + y = 1 + 2\cos x + \cos 2x - \operatorname{sen} 2x$
35. $y'' + 6y' + 9y = 6xe^{-3x} + 9 + 50\operatorname{sen} x$
36. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$
37. $y'' - y' - 12y = 14e^{4x}$
38. $y'' - 2y' - 3y = 4e^{x} - 9$

39. $y'' - y = 12x^2e^x - 10$

40. $y'' - 2y' + 5y = 3e^x \operatorname{sen} x$

41. $y'' + 25y = 20 \operatorname{sen} 5x$

42. $y'' + 2y' + 5y = 50x \operatorname{sen} x + 100x \cos x$

43. $y''' + y'' = 1$

44. $y^{(5)} - y^{(4)} = 2xe^x + 24$

45. $y''' + y'' = 12x^2$

46. $y''' + 2y'' = 24x^2 + 24x + 4$

47. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

48. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

49. $16y^{(4)} - y = 16e^{\frac{x}{2}}$

En los problemas 50-54 determine la forma de una solución particular de la ecuación diferencial dada

50. $y'' - y = e^x(2 + 3x \cos 2x)$

51. $y'' - 3y' = 6 + xe^{3x} + x^2e^{-x} \operatorname{sen} x$

52. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$

53. $y''' - y' = 4xe^x + e^x \cos x - \operatorname{sen} 2x$

54. $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' = x^3 + 1 + x^2 \operatorname{sen} x + xe^x$

4.8 Método de Variación de Parámetros

Este es un método general para determinar una solución particular de una ecuación diferencial lineal. Sin pérdida de generalidad, consideremos la ecuación lineal de segundo orden escrita como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{4.80}$$

El método consiste en buscar una solución de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \tag{4.81}$$

donde y_1 y y_2 son dos soluciones l.i. de la ecuación diferencial homogénea asociada, y u_1, u_2 son dos funciones a determinar de modo que (4.81) sea una solución de (4.80) y satisfagan una condición arbitraria, pero seleccionada de tal forma que se simplifiquen los cálculos.

Derivando (4.81) se tiene que

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \\ &= (u_1y_1' + u_2y_2') + (u_1'y_1 + u_2'y_2). \end{aligned}$$

Podemos simplificar esta expresión, imponiendo a u_1 y u_2 la condición de que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0.$$

En tal caso

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'$$

y por consiguiente

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2''.$$

Sustituyendo las expresiones de y_p, y_p', y_p'' en (4.80), y usando el hecho de que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial homogénea, resulta

$$\begin{aligned} u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + p(u_1y_1' + u_2y_2') + q(u_1y_1 + u_2y_2) &= g(x) \\ u_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + u_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + u_1'y_1' + u_2'y_2' &= g(x) \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= g(x). \end{aligned}$$

Así, buscamos una solución particular de la forma (4.81), con u_1, u_2 funciones que satisfacen las ecuaciones

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0, \tag{4.82}$$

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x). \tag{4.83}$$

Es fácil resolver el sistema de ecuaciones (4.82)-(4.83) para las incognitas u_1' y u_2', empleando la regla de Cramer. Obtenemos

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}, \qquad u_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}, \tag{4.84}$$

donde $W(x)$ denota al wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$. Finalmente, integrando las expresiones (4.84) resulta

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx, \qquad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx. \tag{4.85}$$

Sustituyendo (4.85) en (4.81) se obtiene la solución particular deseada.

EJEMPLO 1. Resolver

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x. \tag{4.86}$$

Solución. Deteminamos primero la solución general de la ecuación homogénea asociada a (4.86), a saber

$$y'' - 2y' + 2y = 0. \tag{4.87}$$

La ecuación característica de (4.87) es

$$r^2 - 2r + 2 = 0,$$

y sus raíces son $r_1 = 1 + i$ y $r_2 = 1 - i$. En consecuencia

$$y_c = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x).$$

Denotemos por

$$y_1 = e^x \cos x, \qquad y_2 = e^x \operatorname{sen} x.$$

Luego

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \operatorname{sen} x \\ (\cos x - \operatorname{sen} x)e^x & (\cos x + \operatorname{sen} x)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Buscamos una solución particular de (4.86) de la forma $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, donde las funciones u_1 y u_2 se calculan utilizando las ecuaciones (4.85). Se tiene que

$$u_1(x) = -\int \frac{(e^x \operatorname{sen} x)(e^x \sec x)}{e^{2x}} dx = -\int \tan x dx = \ln|\cos x|,$$

y

$$u_2(x) = \int \frac{(e^x \cos x)(e^x \sec x)}{e^{2x}} = \int dx = x.$$

Luego

$$y_p = (\ln|\cos x|)(e^x \cos x) + x e^x \operatorname{sen} x$$

y por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial no homogénea (4.86) está dada por

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + (\ln|\cos x|)(e^x \cos x) + x e^x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Resolver

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}, \qquad x > 0. \tag{4.88}$$

Solución. Puesto que la ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0,$$

se sigue que

$$y_c(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 x e^{-2x}.$$

Sean $y_1 = e^{-2x}$ y $y_2 = xe^{-2x}$. Entonces

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}.$$

Usando las expresiones (4.85) obtenemos

$$u_1(x) = -\int \frac{(xe^{-2x})(x^{-2}e^{-2x})}{e^{-4x}} dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln x$$

y

$$u_2(x) = \int \frac{e^{-2x}(x^{-2}e^{-2x})}{e^{-4x}} dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}.$$

Así que

$$\begin{aligned} y_p &= -(\ln x)e^{-2x} - (\frac{1}{x})xe^{-2x} \\ &= -(\ln x)e^{-2x} - e^{-2x}. \end{aligned}$$

Por consiguiente la solución general de (4.88) es

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= (k_1 + k_2 x)e^{-2x} - (\ln x)e^{-2x} - e^{-2x}. \end{aligned}$$

Ya que k_1 es una constante arbitraria, nótese que podemos escribir la solución de (4.88) simplemente como

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} - (\ln x)e^{-2x},$$

siendo $c_1 = k_1 - 1$ y $c_2 = k_2$ constantes arbitrarias.

EJEMPLO 3. Para la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' - xy = 2e^{2x}. \tag{4.89}$$

a) Compruebe que las funciones $y_1 = x^{-1}e^x, y_2 = x^{-1}e^{-x}$, forman un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo $(0, \infty)$ de la ecuación diferencial homogénea correspondiente.

b) Obtenga la solución general de la ecuación no homogénea dada.

Solución.

a) Un cálculo directo muestra que

$$y_1' = (x^{-1} - x^{-2})e^x, \qquad y_1'' = (2x^{-3} - 2x^{-2} + x^{-1})e^x$$

$$y_2' = (-x^{-1} - x^{-2})e^{-x}, \qquad y_2'' = (2x^{-3} + 2x^{-2} + x^{-1})e^{-x}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, encontramos que

$$xy_1'' + 2y_1' - xy_1 = (2x^{-2} - 2x^{-1} + 1)e^x + 2(x^{-1} - x^{-2})e^x - e^x = 0$$

$$xy_2'' + 2y_2' - xy_2 = (2x^{-2} + 2x^{-1} + 1)e^{-x} - 2(x^{-1} + x^{-2})e^{-x} - e^{-x} = 0.$$

Además

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{-1}e^x & x^{-1}e^{-x} \\ (x^{-1} - x^{-2})e^x & (-x^{-1} - x^{-2})e^{-x} \end{vmatrix} = -2x^{-2} \neq 0,$$

para todo $x \in (0, \infty)$. Lo cual demuestra que y_1 y y_2 son dos soluciones l.i. en $(0, \infty)$ de la ecuación diferencial homogénea.

b) Obtenemos ahora una solución particular de (4.89). Escribimos primero la ecuación diferencial en la forma

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y = \frac{2}{x}e^{2x}.$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{(x^{-1}e^{-x})(2x^{-1}e^{2x})}{-2x^{-2}}dx = \int e^x dx = e^x, \\ u_2(x) &= \int \frac{(x^{-1}e^{x})(2x^{-1}e^{2x})}{-2x^{-2}}dx = -\int e^{3x} dx = -\frac{1}{3}e^{3x} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_p &= e^x(x^{-1}e^x) - \frac{1}{3}e^{3x}(x^{-1}e^{-x}) \\ &= \frac{2}{3}x^{-1}e^{2x}. \end{aligned}$$

La solución general de (4.89) es

$$y = c_1x^{-1}e^x + c_2x^{-1}e^{-x} + \frac{2}{3}x^{-1}e^{2x}.$$

EJERCICIOS 4.8

En los problemas 1 a 12, obtenga una solución particular de la ecuación diferencial dada, utilizando el método de variación de parámetros. Escriba la solución general de la ecuación diferencial.

1. $y'' + y = \tan x$
2. $y'' + y = \csc x$
3. $y'' + 4y' + 3y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
4. $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$
5. $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x^2}$
6. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \arctan x$
7. $y'' - 3y' + 2y = e^x \operatorname{sen} 2x$
8. $y'' + 5y' + 6y = \operatorname{sen} e^x$
9. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \ln x$
10. $y'' + y = x \operatorname{sen} x$
11. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2 + 1}$
12. $9y'' - 12y' + 4y = \dfrac{e^{\frac{2}{3}x}}{\sqrt{1 - x^2}}$

En los problemas 13 a 15 determine la solución general de la ecuación diferencial no homogénea dada, usando que la función y_1 indicada es una solución de la ecuación homogénea correspondiente.

13. $x^2y'' - 2y = x^2 \ln x, \qquad y_1 = x^2$
14. $x^2y'' + xy' - y = \dfrac{1}{x}, \qquad y_1 = x$
15. $x^2y'' + xy' + y = \tan \ln x, \qquad y_1 = \cos \ln x$

Capítulo 5

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden

5.1 Movimiento Armónico Simple

Supóngase que un cuerpo de masa m está sujeto al extremo de un resorte flexible (de peso despreciable), suspendido de un soporte rígido.

Cuando el peso está en reposo, describimos su posición como la *posición de equilibrio*. Si el cuerpo se desplaza hacia abajo una cierta distancia y luego se suelta, estará bajo un movimiento vibratorio alrededor de la posición de equilibrio (ver figura 5.1). Nuestro propósito es estudiar el movimiento del cuerpo, conocido como **movimiento armónico simple**, en el cual se ignora cualquier fuerza de fricción con el medio que lo rodea.

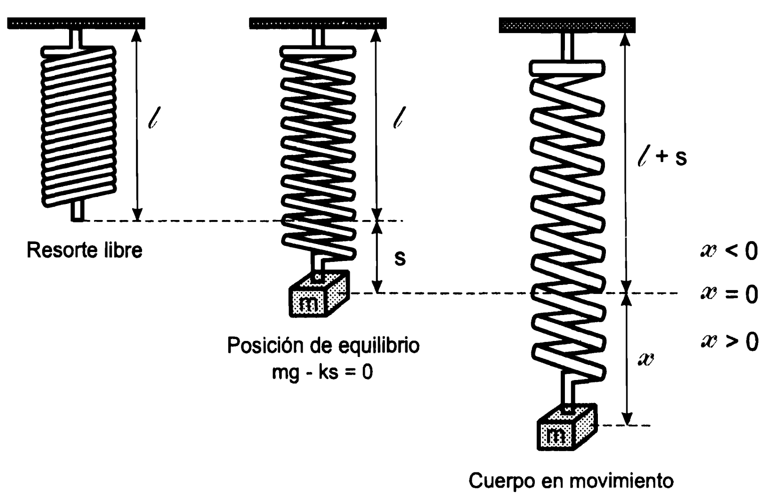


Figura 5.1: Sistema masa-resorte

En este caso, las únicas fuerzas que actúan son:

- Una **fuerza de restitución**, f_r, opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a su magnitud (Ley de Hooke). En términos simples $f_r = kd$, donde k es una constante de proporcionalidad y d la magnitud del alargamiento.

- El peso del cuerpo, dado por $W = mg$.

Adoptaremos la siguiente **convención**. Todas las cantidades (desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza), medidas hacia abajo desde la posición de equilibrio se considerarán como positivas. Las que se miden hacia arriba, son negativas.

En la posición de equilibrio

$$mg - ks = 0.$$

Ahora, al desplazar el cuerpo de esta posición en una magnitud x y soltarla, de la Segunda Ley de Newton se sigue que

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= mg - k(s+x) \\ &= mg - ks - kx, \end{aligned}$$

y usando la condición de equilibrio, resulta

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{5.1}$$

El signo negativo indica que la fuerza de restitución del resorte actúa en dirección opuesta a la del movimiento.

Podemos escribir la ecuación (5.1) en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{5.2}$$

donde $\omega^2 = k/m$.

La ecuación (5.2) es la **ecuación diferencial del movimiento armónico simple o movimiento vibratorio no amortiguado**.

Hay dos condiciones iniciales asociadas con (5.2), a saber

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0,$$

que representan el deplazamiento y velocidad iniciales, respectivamente. Por ejemplo, si $x_0 < 0$ y $v_0 > 0$ entonces el movimiento se inicia en un punto que está $|x_0|$ unidades arriba de la posición de equilibrio y con una velocidad inicial dirigida hacia abajo. Si

$x_0 > 0$ y $v_0 = 0$, la masa está inicialmente en reposo a x_0 unidades abajo de la posición de equilibrio.

La ecuación auxiliar de (5.2) es

$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

cuyas raíces son imaginarias puras

$$r_1 = \omega i, \qquad r_2 = -\omega i.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial (5.2) es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t, \tag{5.3}$$

donde c_1 y c_2 son constantes que dependen de x_0 y v_0.

Nótese que independientemente de los valores de c_1 y c_2, la ecuación del movimiento armónico simple (5.3), define una función periódica de **periodo** $T = 2\pi/\omega$ y describe un movimiento ideal en el que el cuerpo se mueve alternadamente hacia arriba y hacia abajo de la posición de equilibrio, infinitas veces.

El periodo T es el tiempo necesario para que se complete un ciclo y su recíproco $f = 1/T$ se llama la **frecuencia**. El desplazamiento máximo del cuerpo, medido desde la posición de equilibrio, se llama la **amplitud**.

EJEMPLO 1. Se encontró experimentalmente que un peso de 4 lb estira un resorte 6 pulgadas. Si el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 4 pulg/s, determine:

a) La ecuación diferencial y condiciones iniciales que describen el movimieno.

b) La ecuación del movimiento.

c) La posición, velocidad y aceleración del peso 2 segundos después.

d) El periodo, la frecuencia y la gráfica de la solución.

Solución. Ya que 6 pulgadas equivalen a 1/2 ft, de la Ley de Hooke tenemos que

$$4 = (k)\left(\frac{1}{2}\right),$$

de donde

$$k = 8\frac{lb}{ft}.$$

Además $m = W/g = 4/32 = 1/8$ slug.

a) Luego, de (5.2), la ecuación diferencial que describe el movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{8}{1/8}x = 0,$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0, \tag{5.4}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = \frac{1}{3}.$$

b) La ecuación auxiliar de (5.4) es $r^2 + 64 = 0$, cuyas raíces son $r = \pm 8i$. En consecuencia la solución general de (5.4) viene dada por

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t.$$

La condición incial $x(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, mientras que $x'(0) = 1/3$ conduce a $8c_2 = 1/3$. De modo que $c_1 = 0, c_2 = 1/24$ y la solución requerida es

$$x(t) = \frac{1}{24} \operatorname{sen} 8t.$$

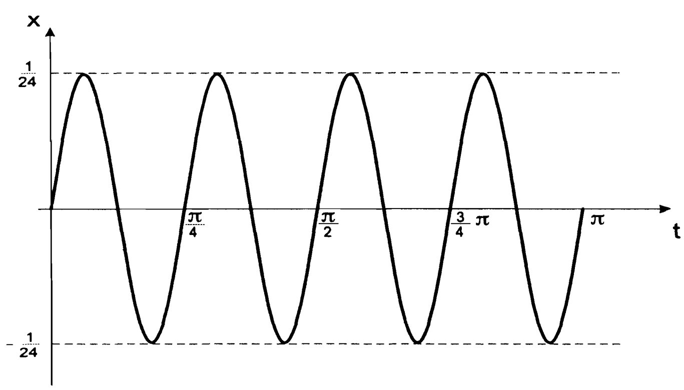


Figura 5.2: Solución del ejemplo 1

c) La posición, velocidad y aceleración del peso 2 segundos después, están dadas, respectivamente por

$$\begin{aligned} x(2) &= \frac{1}{24} \operatorname{sen} 16 = -0.011996, \\ x'(2) &= \frac{1}{3} \cos 16 = -0.31922, \\ x''(2) &= -\frac{8}{3} \operatorname{sen} 16 = 0.76774, \end{aligned}$$

lo cual indica que el cuerpo se encuentra a 0.011996 ft arriba de la posición de equilibrio moviéndose hacia arriba.

d) El periodo y la frecuencia son

$$T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}, \qquad f = \frac{4}{\pi}.$$

Claramente, la amplitud es de $1/24$ ft. La solución muestra que una vez que el sistema se pone en movimiento, permanece en tal estado con la masa desplazándose alternadamente $1/24$ ft hacia cada lado de la posición de equilibrio $x = 0$. La gráfica se muestra en la figura 5.2.

EJEMPLO 2. Suponga que en el ejemplo anterior la masa se desplaza 3 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y luego se le da una velocidad hacia abajo de 4 pulg/s. Determine la ecuación de movimiento.

Solución. Como antes

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t,$$

pero ahora, las condiciones iniciales son

$$x(0) = \frac{1}{4}, \qquad x'(0) = \frac{1}{3}.$$

La condición $x(0) = 1/4$ exige de inmediato que $c_1 = 1/4$, en tanto que usando $x'(0) = 1/3$ se obtiene $c_2 = 1/24$. Así que, la solución es

$$x(t) = \frac{1}{4} \cos 8t + \frac{1}{24} \operatorname{sen} 8t. \tag{5.5}$$

Cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$ en (5.3), como en el ejemplo 2, la amplitud real A de las oscilaciones libres no se obtiene en forma inmediata. Para este caso hacemos uso del siguiente resultado.

Proposición 5.1.1 ***(Forma Alternativa de la Solución)***
Si $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$, con $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, es conveniente escribir la solución $x(t)$ en la forma más simple

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \tag{5.6}$$

donde la amplitud A está dada por

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \tag{5.7}$$

y ϕ es un ángulo de fase definido por las relaciones

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{c_1}{A} \qquad \text{y} \qquad \cos \phi = \frac{c_2}{A}. \tag{5.8}$$

Tomando en cuenta las expresiones (5.8), junto con el hecho de que el rango de la función $f(x) = \arctan x$ es el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, concluimos que el valor de ϕ puede calcularse simplemente como sigue

$$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{c_1}{c_2} & \text{si } c_2 > 0, \\ \\ \arctan \frac{c_1}{c_2} + \pi & \text{si } c_2 < 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

EJEMPLO 3. Reescriba la solución (5.5) del ejemplo 2 en la forma alternativa (5.6) y determine el primer valor de t para el cual la masa pasa por la posición de equilibrio en dirección hacia abajo.

Solución. En el ejemplo 2

$$x(t) = \frac{1}{4}\cos 8t + \frac{1}{24}\operatorname{sen} 8t,$$

de modo que, usando (5.7)

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{24}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{24}.$$

Además $c_2 = 1/24 > 0$, por lo cual de (5.9), se sigue que

$$\phi = \arctan \frac{1/4}{1/24} = \arctan 6 = 1.4056 \text{ rad}.$$

Por consiguiente

$$x(t) = \frac{\sqrt{37}}{24}\operatorname{sen}(8t + 1.4056).$$

Los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio, están determinados por la condición

$$x(t) = 0,$$

es decir

$$\operatorname{sen}(8t + 1.4056) = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación vienen dadas por

$$8t + 1.4056 = n\pi,$$

con n un número entero. Despejando t y recordando que representa una cantidad positiva (el tiempo), obtenemos la sucesión de valores

$$t_n = \frac{n\pi}{8} - 0.1757, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

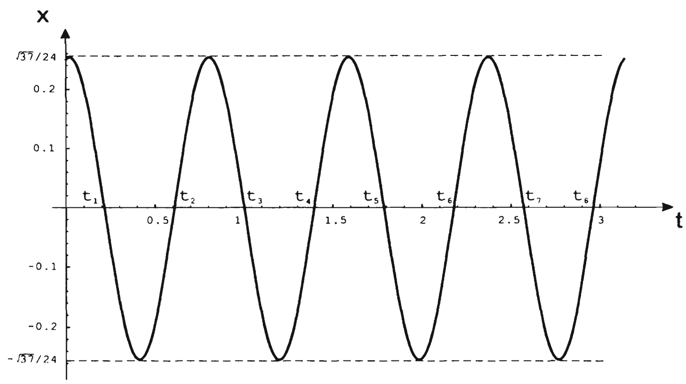


Figura 5.3: Solución del ejemplo 3

Luego, el tiempo requerido es $t_2 = 0.6097$ segundos (veáse la gráfica 5.3).

EJEMPLO 4. Una fuerza de 9 lb estira un resorte 3 pulgadas. Un cuerpo que pesa 24 lb se sujeta al resorte y se suelta desde un punto que está 3 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 36 pulg/s .

a) Determine la ecuación del movimiento $x(t)$.

b) ¿En qué instante pasa el cuerpo por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba por tercera vez?

c) ¿En qué instantes está el cuerpo 3 pulgadas abajo de la posición de equilibrio?

Solución. Primero debemos observar que es necesario convertir a ft las longitudes expresadas en pulgadas, usando la equivalencia

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ pulgadas.}$$

a) Por la Ley de Hooke, se sigue que el valor de la constante del resorte k es

$$k = \frac{9}{1/4}\frac{lb}{ft} = 36\frac{lb}{ft}.$$

Además, $m = 24/32 = 3/4$ slug. De modo que la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 48x = 0. \tag{5.10}$$

En este caso, las condiciones iniciales son

$$x(0) = \frac{1}{4}, \qquad x'(0) = -3. \tag{5.11}$$

Al resolver el problema de valores iniciales (5.10)-(5.11), obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{4}\cos 4\sqrt{3}\,t - \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen} 4\sqrt{3}\,t. \tag{5.12}$$

b) Escribimos la solución (5.12) en la forma alternativa. Tenemos que

$$A = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{1}{2},$$

y como $c_2 < 0$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi.$$

Luego

$$x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(4\sqrt{3}\,t + \frac{5}{6}\pi\right).$$

La gráfica de la ecuación del movimiento se muestra en la figura 5.4.

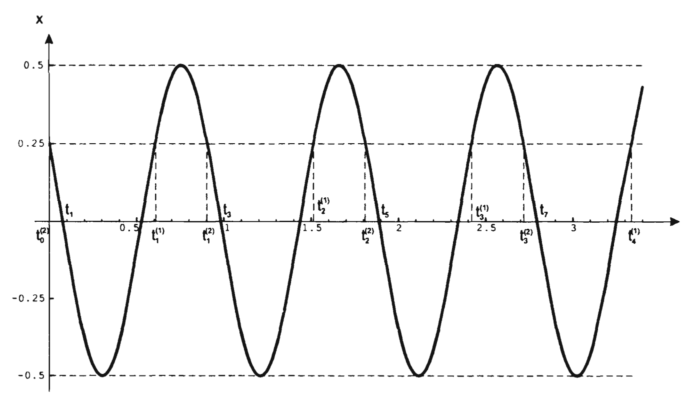


Figura 5.4: Solución del ejemplo 4

Los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio vienen dados por las soluciones de la ecuación $x(t) = 0$, es decir

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(4\sqrt{3}\,t + \frac{5}{6}\pi\right) = 0.$$

De aquí obtenemos la sucesión de valores de t

$$t_n = \frac{n\pi - \frac{5}{6}\pi}{4\sqrt{3}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

El tiempo pedido es claramente

$$t_5 = 1.8894 \text{ segundos}.$$

c) Ahora, debemos hallar los valores de t para los cuales $x(t) = 1/4$, esto es

$$\operatorname{sen}\left(4\sqrt{3}\,t + \frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}.$$

Notemos primero que la ecuación $\operatorname{sen}\theta = 1/2$ tiene como soluciones todos los números θ de la forma $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ y $\frac{5}{6}\pi + 2n\pi$, con n un número entero. Luego, el cuerpo está 3 pulgadas abajo de la posición de equilibrio en los instantes

$$t_n^{(1)} = \frac{-\frac{4}{6}\pi + 2n\pi}{4\sqrt{3}} = \left(n - \frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{6}\pi \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

y

$$t_n^{(2)} = \frac{2n\pi}{4\sqrt{3}} = \frac{n\sqrt{3}\pi}{6} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Obsérvese que en los tiempos $t_n^{(1)}$ el cuerpo se mueve hacia abajo de la posición de equilibrio, mientras que en los tiempos $t_n^{(2)}$ lo hace hacia arriba.

EJERCICIOS 5.1

1. Una masa de $1/2$ kg está suspendida de un resorte cuya constante es de 18 N/m.

   a) Si el cuerpo en reposo se suelta desde un punto que está a 0.1 m abajo de la posición de equilibrio, determine la ecuación del movimiento.

   b) ¿ Cuál es el periodo del movimiento?

2. Una fuerza de 10 N estira un resorte 0.125 m. Después, al extremo libre de ese resorte se fija una masa de 5 kg.

   a) Encuentre la ecuación del movimiento si la masa se suelta desde un punto que está a 0.4 m arriba de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 1.2 m/s.

   b) Escriba la ecuación del movimiento en su forma alternativa.

   c) ¿Cuántas oscilaciones completas realiza el cuerpo durante un intervalo de 8π segundos?

3. Cuando se sujeta una masa de 100 kg al extremo de un gran resorte, éste se estira 0.98 m. Se quita esta masa y se reemplaza por una de 40 kg, la cual se suelta desde un punto que está 0.6 m debajo de la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de 4 m/s.

   a) Determine la ecuación del movimiento.

b) Escriba la ecuación del movimiento en su forma alternativa.

c) Obtenga los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio.

d) Grafique la ecuación del movimiento.

4. Un cuerpo de 2 kg se suspende de un resorte de constante 162 N/m.

   a) Encuentre la ecuación del movimiento si la masa se suelta desde un punto a 0.1 m sobre la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 1.2 m/s.

   b) Escriba la ecuación del movimiento en su forma alternativa.

   c) Grafique la ecuación del movimiento.

   d) Obtenga los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio moviéndose hacia arriba.

   e) ¿En qué posición se encuentra el cuerpo para $t = \pi/8, \pi/9, \pi/3$?

   f) Calcule la velocidad de la masa para los tiempos del inciso anterior y diga en que dirección se está moviendo?

5. Al sujetar un peso de 48 lb a un resorte, éste se alarga 6 pulgadas y luego permanece en reposo. El cuerpo se desplaza 3 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.

   a) Determine la ecuación del movimiento.

   b) ¿Cuál es el periodo del movimiento?

   c) ¿Cuántas oscilaciones completas realiza el cuerpo durante un intervalo de 8π segundos?

   d) Obtenga los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio.

6. Suponga ahora que en el ejercicio 5 el peso se suelta desde un punto que se encuentra 3 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y con una velocidad dirigida hacia abajo de 4 ft/s .

   a) Obtenga la ecuación del movimiento.

   b) Escriba la ecuación del movimiento en su forma alternativa.

   c) Determine los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio.

   d) Grafique la ecuación del movimiento.

7. Encuentre la posición para la cual un peso sujeto a un movimiento armónico simple alcanza su velocidad máxima. ¿Cuánto tiempo transcurre entre dos máximos o mínimos consecutivos?

8. Interprete como un movimiento armónico simple los siguientes problemas de valores iniciales.

   a) $\dfrac{1}{4}\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0; \qquad x(0) = 2,\ x'(0) = -4$

   b) $\dfrac{1}{25}\dfrac{d^2x}{dt^2} + 25x = 0; \qquad x(0) = -0.1,\ x(0) = 3$

9. Un peso de 25 lb estira un resorte 6 pulgadas. El resorte está suspendido de un techo y se encuentra en reposo. Posteriormente el peso se desplaza 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 2 ft/s, dirigida hacia arriba.

   a) Obtenga la ecuación del movimiento.

   b) Escriba la ecuación del movimiento en su forma alternativa.

   c) ¿En qué instantes el peso se encuentra 5/24 ft abajo de la posición de equilibrio?

10. Un cuerpo que pesa 20 libras sujeto al extremo de un resorte lo estira 0.32 ft. El peso se desplaza 6 pulgadas hacia abajo de la posición de equilibrio y desde ahí se le comunica una velocidad dirigida hacia arriba de 5 ft/s.

    a) Determine la ecuación del movimiento.

    b) ¿En qué instante pasa el cuerpo por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba por tercera vez? ¿Qué velocidad lleva?

    c) ¿En qué instantes está el cuerpo 1/3 ft abajo de la posición de equilibrio?

    d) ¿En qué instantes alcanza el cuerpo sus desplazamientos extremos hacia uno u otro lado de la posición de equilibrio?

5.2 Movimiento Vibratorio Amortiguado

En la sección anterior se supuso que no actúan fuerzas retardadoras sobre la masa en movimiento, lo cual no es cierto a menos que se encuentre suspendida en un vacío perfecto.

Vamos a considerar ahora el efecto de la resistencia del medio sobre la masa. Supongamos que sobre el cuerpo actúa una fuerza amortiguadora, dada por un múltiplo constante de la velocidad $\dfrac{dx}{dt}$.

De la segunda ley de Newton, en ausencia de fuerzas externas, se sigue que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt},$$

donde β es una **constante de amortiguación** positiva y el signo se debe a que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta al movimiento. Obtenemos así la ecuación diferencial del **movimiento vibratorio amortiguado libre**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0,$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{5.13}$$

con $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$.

La ecuación auxiliar de (5.13) es

$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0,$$

cuyas raíces están dadas por

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \qquad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}. \tag{5.14}$$

Dependiendo del valor de $\lambda^2 - \omega^2$, distinguimos los tres casos siguientes.

CASO I. Movimiento Sobre-Amortiguado. Si $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, las raíces (5.14) son reales y distintas, y en consecuencia la solución general de (5.13) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right), \tag{5.15}$$

que representa un movimiento suave y no oscilatorio.

Algunas gráficas posibles de (5.15) se muestran en la figura 5.5.

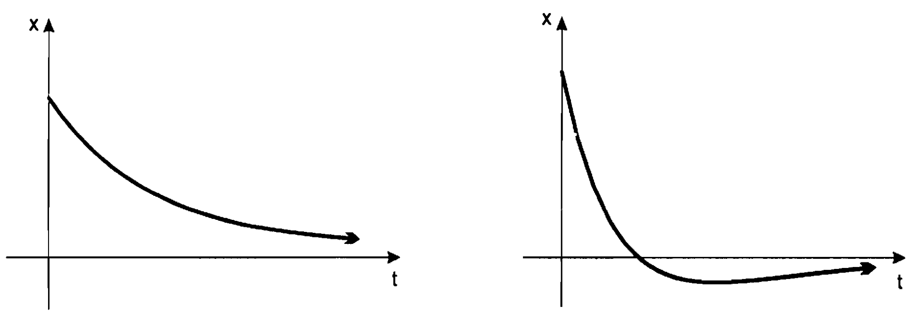


Figura 5.5: Movimiento sobreamortiguado

CASO II. Movimiento Críticamente Amortiguado. Si $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ la solución general de (5.13) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t), \tag{5.16}$$

puesto que $r_1 = r_2 = -\lambda$.

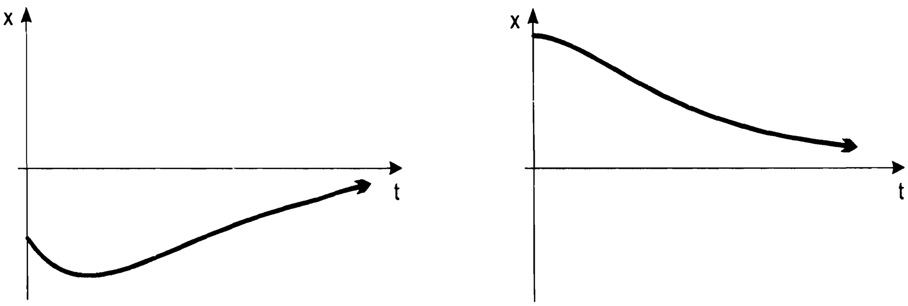


Figura 5.6: Movimiento críticamente amortiguado

En esta situación, una pequeña disminución de la fuerza de amortiguamiento produciría un movimiento oscilatorio. Algunas gráficas posibles de la solución (5.16) se muestran en la figura 5.6.

Un examen de las derivadas de las soluciones (5.15) y (5.16), de los casos I y II respectivamente, permite ver que estas funciones pueden tener a lo más un máximo relativo o un mínimo relativo para $t > 0$, por lo que el cuerpo puede pasar a lo más una vez por la posición de equilibrio.

CASO III. Movimiento Subamortiguado. Si $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, las raíces (5.14) son complejas y se pueden escribir como

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, i, \qquad r_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, i,$$

de modo que la solución general de (5.13) es en este caso

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t). \tag{5.17}$$

Ahora, el movimiento es oscilatorio, pero la amplitud de las oscilaciones tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Nótese que, en analogía a lo que hicimos en el movimiento armónico simple, la solución (5.17) puede expresarse en forma compacta, de acuerdo a la siguiente proposición.

Proposición 5.2.1 ***(Forma Alternativa de la Ecuación del Movimiento Subamortiguado)*** *Cualquier función de la forma*

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t),$$

con $c_1 \neq 0$ *y* $c_2 \neq 0$, *puede escribirse como*

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \phi), \tag{5.18}$$

donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \tag{5.19}$$

y el ángulo de fase ϕ es tal que

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{A} \qquad \text{y} \qquad \cos\phi = \frac{c_2}{A}.$$

Es decir

$$\phi = \begin{cases} \arctan\frac{c_1}{c_2} & \text{si } c_2 > 0, \\ \\ \arctan\frac{c_1}{c_2} + \pi & \text{si } c_2 < 0. \end{cases} \tag{5.20}$$

En la forma alternativa (5.18) el coeficiente $Ae^{-\lambda t}$ se denomina la **amplitud amortiguada** de las soluciones, $2\pi/\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ es el **cuasiperiodo** y $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}/2\pi$ es la **cuasifrecuencia**. El cuasiperiodo es el intervalo de tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos de $x(t)$, también es igual al doble de tiempo entre dos ceros sucesivos de la solución.

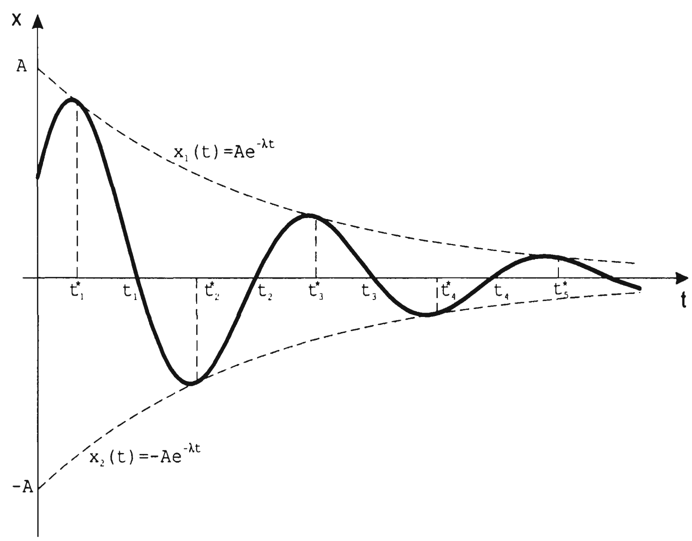


Figura 5.7: Movimiento subamortiguado

Para representar gráficamente la solución (5.18), es útil tomar en cuenta las siguientes observaciones. Ver figura 5.7. En primer lugar, las intersecciones con el eje t se obtienen resolviendo la ecuación $x(t) = 0$, esto es

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \phi) = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \phi &= n\pi, \\ t_n &= \frac{n\pi - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Por otra parte, la gráfica de $x(t)$ es tangente a las curvas exponenciales $x_1(t) = Ae^{-\lambda t}, x_2(t) = -Ae^{-\lambda t}$ en los valores de t, tales que

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \phi\right) = \pm 1.$$

Resolviendo esta ecuación encontramos las soluciones $t = t_k^\star$, dadas por

$$t_k^\star = \frac{(2k+1)\pi/2 - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}},$$

con k en $\mathbb{N}$.

EJEMPLO 1. Se encontró experimentalmente que un cuerpo de 4 lb estira un resorte 6 pulgadas. El medio ofrece una resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a 2.5 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso se desplaza 4 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio y se suelta.

Solución. La ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 2.5\frac{dx}{dt}$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0. \tag{5.21}$$

Las condiciones iniciales son

$$x(0) = \frac{1}{3}, \qquad x'(0) = 0.$$

La ecuación auxiliar de (5.21) es $r^2 + 20r + 64 = 0$ y sus raíces son $r_1 = -4, r_2 = -16$, de modo que

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t}.$$

La condición $x(0) = 1/3$ implica que

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{3}, \tag{5.22}$$

en tanto que $x'(0) = 0$ nos lleva a

$$-4c_1 - 16c_2 = 0. \tag{5.23}$$

Resolviendo el sistema (5.22)-(5.23) obtenemos los valores

$$c_1 = \frac{4}{9}, \qquad c_2 = -\frac{1}{9}.$$

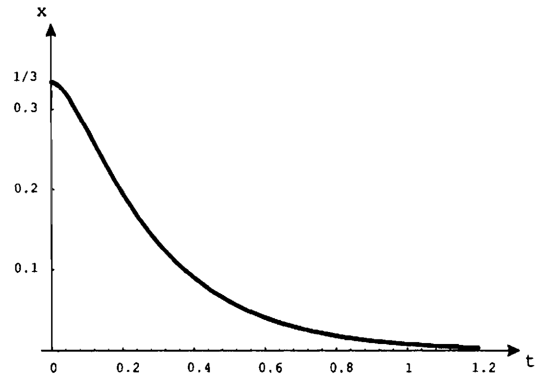


Figura 5.8: Solución del ejemplo 1

Por consiguiente

$$x(t) = \frac{4}{9}e^{-4t} - \frac{1}{9}e^{-16t}. \tag{5.24}$$

La gráfica de la solución (5.24) se da en la figura 5.8. Como se observa no ocurren oscilaciones ya que el peso tiene tanto amortiguamiento que sólo retorna gradualmente a la posición de equilibrio sin pasar por esta. Se trata de un movimiento sobreamortiguado.

EJEMPLO 2. Resuelva nuevamente el ejemplo 1, suponiendo ahora que $\beta = 2$.

Solución. En este caso la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 2\frac{dx}{dt}$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{dx}{dt} + 64x = 0. \tag{5.25}$$

La ecuación característica de (5.25) es $r^2 + 16r + 64 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = r_2 = -8$, por lo cual

$$x(t) = c_1e^{-8t} + c_2te^{-8t}.$$

Las condiciones iniciales $x(0) = 1/3, x'(0) = 0$ conducen al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3}, \\ -8c_1 + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{-8t} + \frac{8}{3}te^{-8t} = \frac{1}{3}e^{-8t}(1+8t). \tag{5.26}$$

La gráfica de la solución (5.26) se muestra con línea continua en la figura 5.9, donde con línea interrumpida aparece también la solución del ejemplo 1, a fin de hacer una comparación. Aunque ahora es un movimiento críticamente amortiguado, vemos que las gráficas son muy similares.

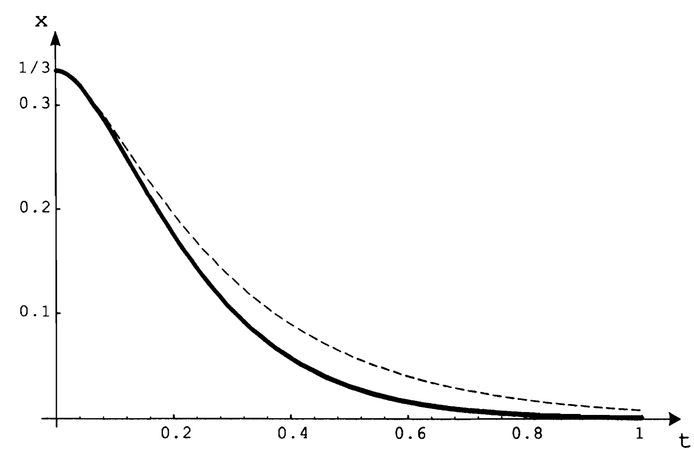


Figura 5.9: Soluciones de los ejemplos 1 y 2

Si modificamos las condiciones iniciales el tipo de movimiento se conserva, pero algunas de sus características si pueden cambiar.

EJEMPLO 3. Si en el ejemplo 2 se cambian las condiciones iniciales a $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1/3$, determine $x(t)$.

Solución. La solución general sigue siendo

$$x(t) = c_1 e^{-8t} + c_2 t e^{-8t}.$$

Sin embargo, las condiciones iniciales nos conducen a los valores de $c_1 = 0$ y $c_2 = 1/3$. En consecuencia

$$x(t) = \frac{1}{3} t e^{-8t}. \tag{5.27}$$

Se tiene que

$$x'(t) = \frac{1}{3}(e^{-8t} - 8te^{-8t}) = \frac{1}{3} e^{-8t}(1 - 8t),$$

de dónde se observa que $x(t)$ alcanza un desplazamiento máximo en $t = 1/8$ segundos igual a $x_{max} = x(1/8) = 0.01533$ ft. Ver figura 5.10.

EJEMPLO 4. Tomando en cuenta que $\beta = 1$ repita el ejemplo 1. Escriba la solución en la forma alternativa (5.18). Determine los instantes en los que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio y realice la gráfica de la ecuación del movimiento.

Solución. La ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - \frac{dx}{dt},$$

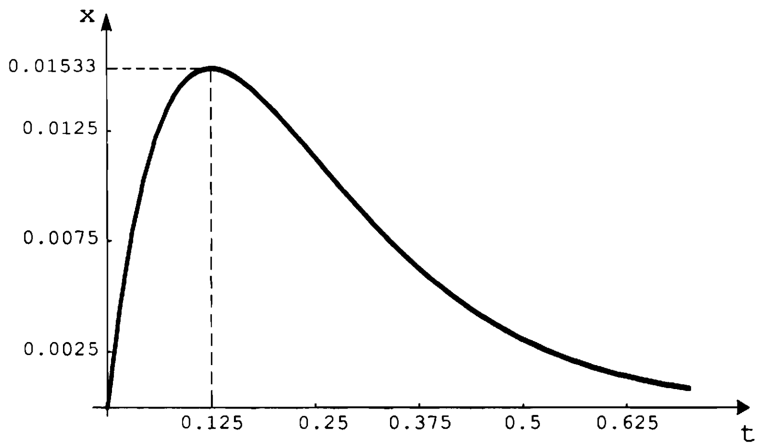


Figura 5.10: Solución del ejemplo 3

esto es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 64x = 0.$$

Ya que las raíces características son $r_{1,2} = -4 \pm 4\sqrt{3}\,i$, su solución general está dada por

$$x(t) = e^{-4t}(c_1 \cos 4\sqrt{3}\,t + c_2 \operatorname{sen} 4\sqrt{3}\,t).$$

De las condiciones iniciales $x(0) = 1/3$ y $x'(0) = 0$ se sigue que

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3}, \\ -4c_1 + 4\sqrt{3}c_2 &= 0. \end{aligned}$$

De modo que $c_2 = \sqrt{3}/9$ y

$$x(t) = \frac{1}{9}e^{-4t}(3\cos 4\sqrt{3}\,t + \sqrt{3}\operatorname{sen} 4\sqrt{3}\,t). \tag{5.28}$$

Ahora bien, usando las expresiones (5.19) y (5.20) obtenemos

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2} = \frac{2}{9}\sqrt{3}, \qquad \phi = \arctan\frac{1/3}{\sqrt{3}/9} = \frac{\pi}{3}.$$

Luego, escribimos la solución (5.28) en la forma

$$x(t) = \frac{2}{9}\sqrt{3}e^{-4t}\operatorname{sen}\left(4\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3}\right). \tag{5.29}$$

Por otra parte, las soluciones de la ecuación $x(t) = 0$ se encuentran directamente de (5.29) y están dadas por

$$4\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3} = n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Así que, el cuerpo pasa por la posición de equilibrio en los instantes

$$t_n = \frac{(3n-1)\pi}{12\sqrt{3}} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Finalmente, la gráfica de $x(t)$ es tangente a las curvas exponenciales $x_1(t) = 2\sqrt{3}e^{-4t}/9$ y $x_2(t) = -2\sqrt{3}e^{-4t}/9$ en los valores de t dados por la condición

$$\operatorname{sen}\left(4\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1,$$

es decir

$$4\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

o bien

$$t_n^{\star} = \frac{(6n+1)\pi}{24\sqrt{3}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

La gráfica de (5.29) se muestra en la figura 5.11.

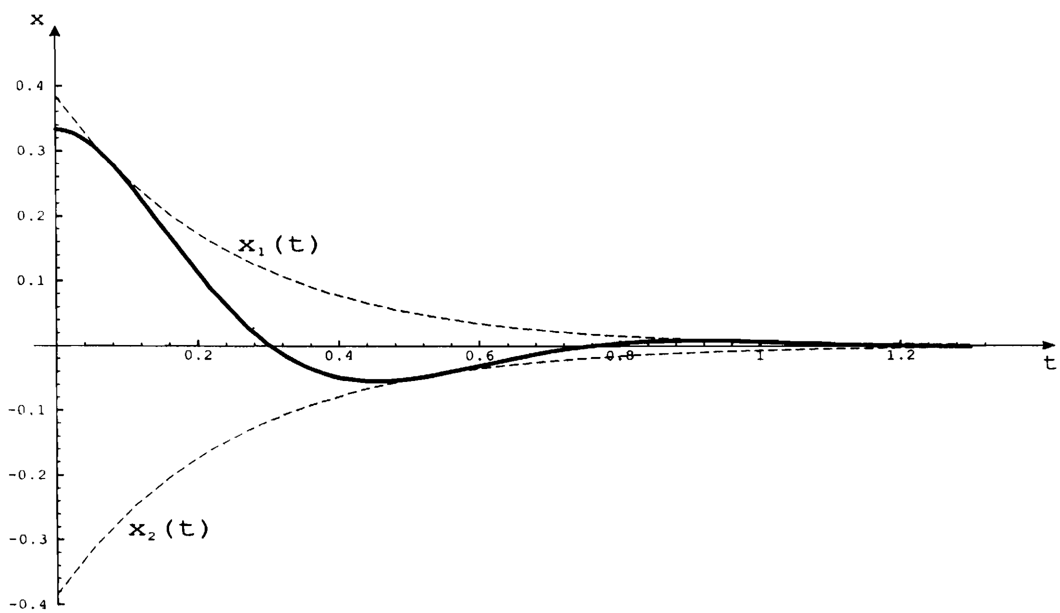


Figura 5.11: Solución del ejemplo 4

EJEMPLO 5. Después de que un cuerpo que pesa 10 lb se sujeta a un resorte de 5 ft de largo, el resorte mide 7 ft. Se quita el cuerpo de 10 lb y se le reemplaza por uno de 8 lb. El sistema completo se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea.

a) Obtenga la ecuación del movimiento si el peso se suelta desde un punto que se encuentra 1/2 ft abajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 1 ft/s.

b) Encuentre los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio en dirección hacia abajo.

c) Grafique la ecuación del movimiento.

Solución.

a) De la ley de Hooke es claro que

$$k = \frac{10}{2}\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}} = 5\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}}.$$

Además

$$m = \frac{8}{32}\ \frac{\text{lb}}{\text{ft/s}^2} = \frac{1}{4}\ \text{slug}$$

y $\beta = 1$, así que la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20x = 0. \tag{5.30}$$

Resolviendo (5.30) sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1/2$ ft y $x'(0) = 1$ ft/s, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}(\cos 4t + \operatorname{sen} 4t). \tag{5.31}$$

b) Escibimos primero la solución (5.31) en la forma alternativa. Tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \phi &= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

De modo que

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}\left(4\text{t} + \frac{\pi}{4}\right),$$

por lo cual $x(t) = 0$ si y sólo si

$$4t + \frac{\pi}{4} = n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, los valores

$$t_n = n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16},$$

con n un entero positivo par, son los instantes en los que el cuerpo pasa por la posición de equilibrio moviéndose hacia abajo.

c)La gráfica se muestra en la figura 5.12.

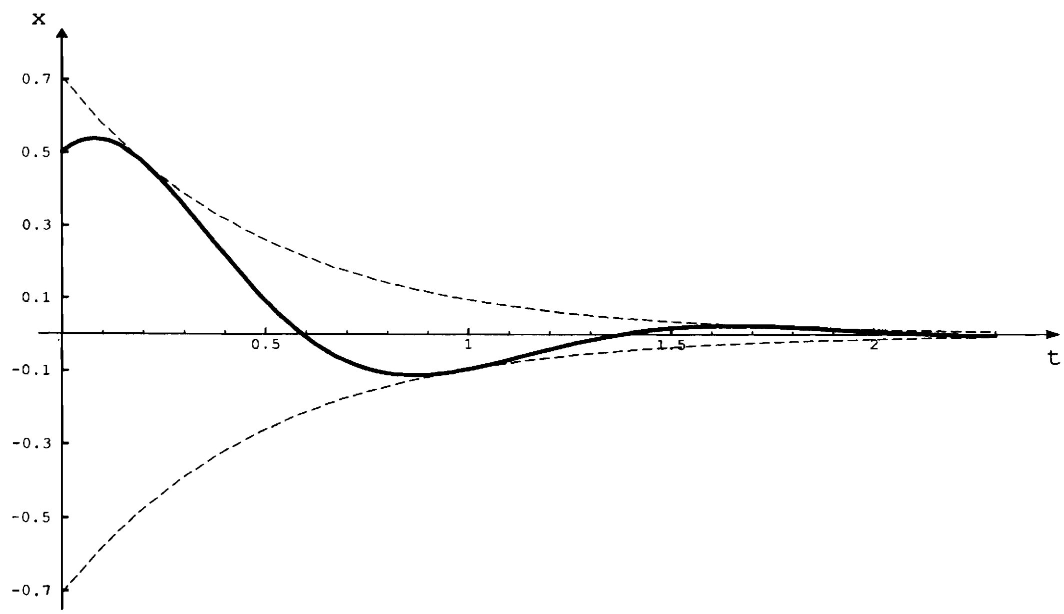


Figura 5.12: Solución del ejemplo 5

EJERCICIOS 5.2

1. Un peso de 2 lb está sujeto a un resorte el cual tiene una constante de elasticidad de 4 lb/ft. El peso se suelta desde un punto que se encuentra 6 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 2 ft/s, en un medio que presenta una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instántanea. Determine:

    a) La ecuación del movimiento.

    b) Los instantes en los cuales el cuerpo pasa por la posición de equilibrio.

    c) El desplazamiento extremo del peso.

    d) La gráfica de la ecuación del movimiento.

2. Supóngase que de un resorte se suspende una masa de 1 slug. Para los valores de las constantes y condiciones iniciales dadas a continuación, determine en cada inciso: la ecuación del movimiento en su forma alternativa, los instantes cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba y la gráfica del movimiento.

    a) $k = 3$ lb/ft, $\beta = 6$; $x(0) = 4$ pulg, $x'(0) = -2$ ft/s.

    b) $k = 2$ lb/ft, $\beta = 2$; $x(0) = -3$ pulg, $x'(0) = -1$ ft/s.

3. Un peso de 16 lb estira un resorte 4 ft, el sistema completo se sumerge en un medio viscoso que opone una fuerza de amortiguación numéricamente igual a tres veces la velocidad instantánea. Determine:

    a) La ecuación del movimiento si el peso se suelta desde un punto que está 1 ft arriba de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 7 ft/s.

    b) El instante en que cruza por la posición de equilibrio.

    c) La gráfica de la ecuación del movimiento.

4. Un peso de 8 lb estira un resorte 2 ft y el sistema se encuentra en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a β veces la velocidad instantánea, donde β es una constante positiva. Determinar los valoes de β para que el movimiento sea:

    a) Sobreamortiguado.

    b) Críticamente amortiguado.

    c) Subamortiguado.

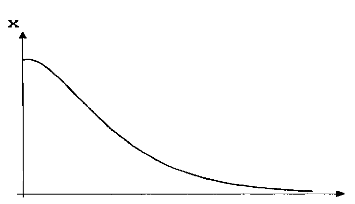
5. Una masa de 1/2 slug estira un resorte 4 ft y el medio que rodea al sistema masa-resorte ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a 4.5 veces la velocidad instantánea. El peso se suelta 6 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de v_0 ft/s. ¿ Cómo debe ser v_0 para que la masa pase por la posición de equilibrio ?

6. Dar una posible interpretación física del siguiente problema de valores iniciales

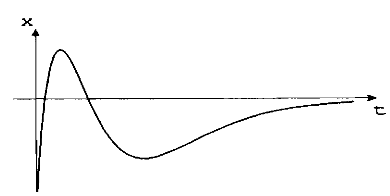
$$\frac{4}{32}\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \frac{1}{4}x = 0$$

$$x(0) = -1, \qquad x'(0) = -1$$

7. Indique si las siguientes gráficas corresponden a un movimiento amortiguado, en cuyo caso clasifíquelo.



(a)



(b)

5.3 Movimiento Vibratorio Forzado

En las dos secciones anteriores estudiamos el problema de un resorte donde sólo se consideraron las fuerzas restauradora y amortiguadora. Veremos ahora casos dónde actúan otras fuerzas externas que varían con el tiempo. Dichas fuerzas pueden ocurrir, por ejemplo, cuando el soporte que sostiene al resorte se mueve verticalmente de cierta manera dada, tal como en un movimiento periódico o cuando al peso se le da un pequeño empuje cada vez que alcanza la posición más baja.

Denotemos con $f(t)$ la fuerza exterior que actúa sobre la masa. De la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial del movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t), \tag{5.32}$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t), \tag{5.33}$$

donde $2\lambda = \beta/m, \omega^2 = k/m$ y $F(t) = f(t)/m$.

Para resolver la ecuación no homogénea (5.33) podemos emplear el método de los coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros, según sea más conveniente.

EJEMPLO 1. Un resorte vertical con constante de 6 lb/ft tiene suspendida una masa de 1/2 slug. Se aplica una fuerza externa dada por $f(t) = 40\operatorname{sen} 2t,\ t \geq 0$. Supóngase que actúa una fuerza amortiguadora numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea y que inicialmente el cuerpo está en reposo en su posición de equilibrio. Determine la posición del cuerpo en cualquier tiempo $t > 0$.

Solución. Con los valores de $k = 6$ lb/ft, $m = 1/2$ slug y $\beta = 2$, la ecuación diferencial de movimiento resultante es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 12x = 80\operatorname{sen} 2t. \tag{5.34}$$

La solución complementaria de (5.34) es

$$x_c(t) = e^{-2t}(c_1\cos 2\sqrt{2}\,t + c_2\operatorname{sen} 2\sqrt{2}\,t).$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados proponemos una solución particular de (5.34) de la forma

$$x_p(t) = A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t.$$

En tal caso

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -2A\operatorname{sen} 2t + 2B\cos 2t, \\ x_p''(t) &= -4A\cos 2t - 4B\operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5.34), se sigue que

$$(8A + 8B)\cos 2t + (8B - 8A)\operatorname{sen} 2t = 80 \operatorname{sen} 2t.$$

El sistema de ecuaciones resultante

$$\begin{aligned} 8A + 8B &= 0, \\ -8A + 8B &= 80, \end{aligned}$$

conduce a los valores $A = -5$ y $B = 5$. Así que

$$x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos 2\sqrt{2}\,t + c_2 \operatorname{sen} 2\sqrt{2}\,t) + 5(\operatorname{sen} 2t - \cos 2t).$$

Empleando las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ encontramos que $c_1 = 5$ y $c_2 = 0$. Por lo tanto

$$x(t) = 5e^{-2t}\cos 2\sqrt{2}\,t + 5(\operatorname{sen} 2t - \cos 2t).$$

Obsérvese que en el ejemplo anterior la solución complementaria

$$x_c(t) = 5e^{-2t}\cos 2\sqrt{2}\,t$$

tiene la propiedad de que

$$\lim_{t\to\infty} x_c(t) = 0,$$

por lo cual se dice que $x_c(t)$ es un **término transitorio** o una **solución transitoria**. Así para valores grandes de t, $x(t)$ se aproxima a $x_p(t)$. A $x_p(t)$ se le llama **solución estacionaria o de estado permanente**. Ver figura 5.13.

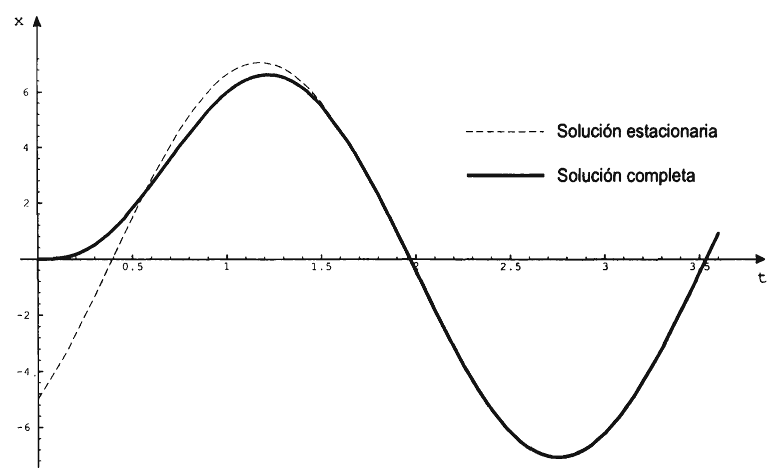


Figura 5.13: Solución del ejemplo 1

De hecho, si en la ecuación diferencial (5.33) ponemos $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \alpha t$ o $F(t) = F_0 \cos \alpha t$, donde F_0 y α son constantes, entonces su solución general consiste en la suma de dos términos: *término transitorio* más *término estacionario*.

5.3.1 Resonancia

Estudiaremos la ecuación (5.33) en el caso especial en que $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \alpha t$, $t \geq 0$, donde F_0 y α son constantes positivas. La ecuación diferencial básica es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \alpha t, \tag{5.35}$$

donde $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$.

Supondremos que β es suficientemente pequeño de modo que el amortiguamiento es menor que el crítico. En otras palabras, consideraremos que $\lambda < \omega$. Luego, la solución complementaria de (5.35) tiene la forma

$$x_c(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t),$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias, que dependen de las condiciones iniciales, o equivalentemente

$$x_c(t) = Ae^{-\lambda t} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi),$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\operatorname{sen}\phi = c_1/A$ y $\cos\phi = c_2/A$.

Ahora determinaremos una solución particular de (5.35), utilizando el método de los coeficientes indeterminados. Sea

$$x_p(t) = B\cos\alpha t + C \operatorname{sen}\alpha t.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -\alpha B \operatorname{sen}\alpha t + \alpha C\cos\alpha t, \\ x_p''(t) &= -\alpha^2 B\cos\alpha t - \alpha^2 C \operatorname{sen}\alpha t. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x_p(t), x_p'(t)$ y $x_p''(t)$ en (5.35) se obtiene

$$(-\alpha^2 B + 2\lambda\alpha C + \omega^2 B)\cos\alpha t + [(\omega^2 - \alpha^2)C - 2\alpha\lambda B] \operatorname{sen}\alpha t = F_0 \operatorname{sen}\alpha t.$$

Igualando los coeficientes en la última igualdad, resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \alpha^2)B + 2\lambda\alpha C &= 0, \\ -2\alpha\lambda B + (\omega^2 - \alpha^2)C &= F_0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} B &= -\frac{2\alpha\lambda F_0}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2}, \\ C &= \frac{(\omega^2 - \alpha^2)F_0}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2}. \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$x_p(t) = -\frac{2\alpha\lambda F_0}{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\cos\alpha t + \frac{(\omega^2-\alpha^2)F_0}{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\operatorname{sen}\alpha t.$$

Podemos escribir $x_p(t)$ en la forma

$$x_p(t) = \tilde{A}\operatorname{sen}(\alpha t+\theta),$$

donde

$$\tilde{A} = \sqrt{\left[-\frac{2\alpha\lambda F_0}{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\right]^2 + \left[\frac{(\omega^2-\alpha^2)F_0}{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}\right]^2},$$

es decir, simplificando

$$\tilde{A} = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}}.$$

El ángulo θ está determinado por las relaciones

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{2\alpha\lambda}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{\omega^2-\alpha^2}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}}.$$

Así que

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}}\operatorname{sen}(\alpha t+\theta).$$

Obsérvese que la solución completa es la suma de dos términos

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t).$$

El primero

$$x_c(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t+\phi),$$

representa la oscilación amortiguada, que sería todo el movimieno del sistema si la fuerza externa $F(t)$ no actuara. El segundo término

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}}\operatorname{sen}(\alpha t+\theta),$$

que resulta de la presencia de la fuerza externa, representa un movimiento armónico simple de periodo $2\pi/\alpha$ y amplitud

$$g(\alpha) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\lambda^2}}.$$

Para F_0, ω y λ fijos, la amplitud es función de α. Consideremos la función $g(\alpha)$ en el intervalo $(0, \infty)$. Se tiene que

$$g'(\alpha) = \frac{2F_0\alpha(\omega^2 - \alpha^2 - 2\lambda^2)}{[(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2]^{3/2}}.$$

Luego, $g'(\alpha) = 0$ si y sólo si $\alpha = \alpha_0 = 0$ o $\alpha = \alpha_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$. Se puede verificar fácilmente que la amplitud de las oscilaciones alcanza un valor máximo cuando

$$\alpha = \alpha_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}.$$

El valor máximo de la amplitud es

$$g(\alpha_1) = \frac{F_0}{2\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}.$$

Definición 5.3.1 *Cuando la frecuencia de la fuerza exterior es*

$$\frac{\alpha_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}}{2\pi},$$

se dice que ***el sistema está en resonancia.***

En un sistema en resonancia ($\alpha = \alpha_1$), la amplitud de la oscilación varía inversamente con la constante de amortiguamiento. De hecho, se observa que

$$\lim_{\beta \to 0^+} g(\alpha_1) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F_0}{2\lambda\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} = \infty$$

y

$$\lim_{\beta \to 0^+} \alpha_1 = \omega.$$

Diremos que hay **resonancia pura** si $\beta = 0$. En tal caso $\alpha = \alpha_1 = \omega$, o sea que la frecuencia de la fuerza externa es igual a la frecuencia natural del sistema.

Finalmente obsérvese que la resonancia puede ocurrir solamente si

$$\begin{aligned} \omega^2 &> 2\lambda^2, \\ \frac{k}{m} &> 2\frac{\beta^2}{4m^2}, \end{aligned}$$

esto es

$$\beta < \sqrt{2km}. \tag{5.36}$$

EJEMPLO 2. Un peso de 4 lb se suspende de un resorte cuya constante es de $k = 8$ lb/ft. Suponga que una fuerza externa dada por $f(t) = 4\cos 8t$ se aplica al resorte y que no hay amortiguamiento. Describa el movimiento que resulta si se asume que inicialmente el peso está en la posición de equilibrio y que su velocidad inicial es cero.

Solución. La ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{4}{32}\frac{d^2x}{dt^2} = -8x + 4\cos 8t.$$

Equivalentemente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 32\cos 8t. \tag{5.37}$$

La solución complementaria de (5.37) es

$$x_c(t) = c_1\cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t.$$

Proponemos una solución particular de la forma

$$x_p(t) = t(A\cos 8t + B\operatorname{sen} 8t).$$

Sustituyendo en (5.37) se encuentra que $A = 0$ y $B = 2$. Así que

$$x(t) = c_1\cos 8t + c_2\operatorname{sen} 8t + 2t\operatorname{sen} 8t.$$

De las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ encontramos que $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Por consiguiente la ecuación del movimiento es

$$x(t) = 2t\operatorname{sen} 8t.$$

Su gráfica se muestra en la figura 5.14.

Se observa que en este caso hay resonancia pura en vista de que $\beta = 0$ y la frecuencia de la fuerza externa aplicada es igual a la frecuencia natural del sistema no amortiguado.

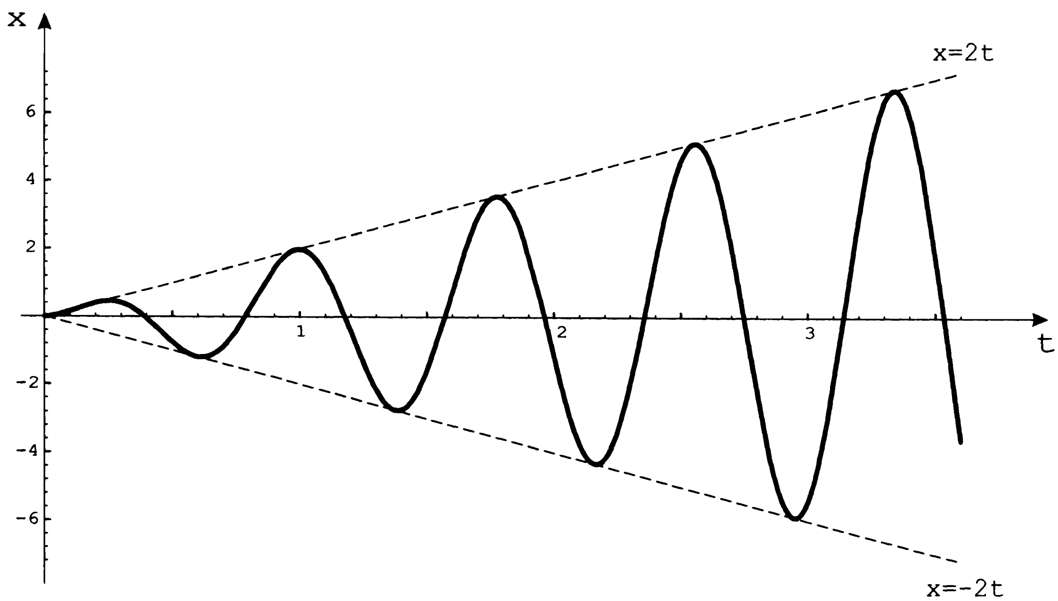


Figura 5.14: Solución del ejemplo 2

EJERCICIOS 5.3

1. Una masa de 1 slug se encuentra suspendida de un resorte de constante de elasticidad igual a 4 lb/ft y el sistema está inmerso en un medio que opone una fuerza de resistencia numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea. Si la masa se suelta 6 pulgadas arriba de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 4 ft/s, obtenga:

   a) La ecuación del movimiento, si actúa una fuerza externa sobre la masa dada por $f(t) = 20\cos 2t + 10\,\text{sen}\,2t$

   b) Las gráficas de la solución transitoria y de la solución estacionaria utilizando el mismo sistema de ejes coordenados.

   c) La gráfica de la ecuación del movimiento.

2. Un peso de 32 lb se sujeta a un resorte de constante de elasticidad igual a 5 lb/ft. El peso y el resorte se sumergen en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a 6 veces la velocidad instantánea. El movimiento se inicia en un punto que se encuentra a 4 pulgadas abajo de la posición de equilibrio y partiendo del reposo. Determine:

   a) La ecuación del movimiento si sobre el peso se aplica una fuerza externa igual a $f(t) = e^{-t}$.

   b) La gráfica de la ecuación del movimiento.

3. Un resorte tiene una constante de elasticidad igual a 1 lb/ft. Un peso de 8 lb se suspende de un extremo del resorte y el sistema se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si el peso se suelta en reposo, 4 pulgadas sobre la posición de equilibrio y sobre él actúa una fuerza externa $f(t) = 25 \operatorname{sen} 4t$, obtenga la ecuación del movimiento y su gráfica.

4. Un peso de 3.2 lb estira un resorte 6.4 ft. Si el peso se suelta 3 pulgadas abajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 6 ft/s y el medio en que está el sistema masa-resorte ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la quinta parte de la velocidad instantánea, determine la ecuación del movimiento si además se aplica al peso una fuerza externa dada por $f(t) = e^{-t} \cos 2t$. Grafique la solución obtenida.

5. Resuelva el ejercicio 1 en ausencia de la fuerza de resistencia.

6. Resuelva el ejercicio 4 en ausencia de la fuerza de resistencia.

7. Un resorte sujeto a un soporte tiene suspendida una masa de 2 kg y la constante de elasticidad del resorte es de 4 N/m. El sistema está en reposo cuando el soporte empieza a oscilar de acuerdo a la expresión $h(t) = 2\cos 3t$. Determine:

   a) La ecuación diferencial del movimiento si el sistema completo está inmerso en un medio que opone una fuerza de resistencia numéricamente igual a 6 veces la velocidad instantánea.

   b) La ecuación del movimiento (tome en cuenta que el peso está en reposo en la posición de equilibrio cuando el soporte empieza a oscilar).

   c) La gráfica de la ecuación del movimiento.

8. Resuelva el ejercicio 7 en ausencia de amortiguamiento.

5.4 Circuito LRC en Serie

Ahora aplicaremos la teoría antes vista para determinar la carga $q(t)$ y la corriente $i(t)$ en un circuito como el mostrado en la figura 5.15, en el que se conectan un inductor o bobina de L henrys, una resistencia de R ohms, un condensador o capacitor de C farads y un generador de voltaje cuya fuerza electromotriz está dada por una función $E(t)$ volts.

De la segunda ley de Kirchhoff se tiene

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{5.38}$$

Ya que

$$i = \frac{dq}{dt}, \qquad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}, \tag{5.39}$$

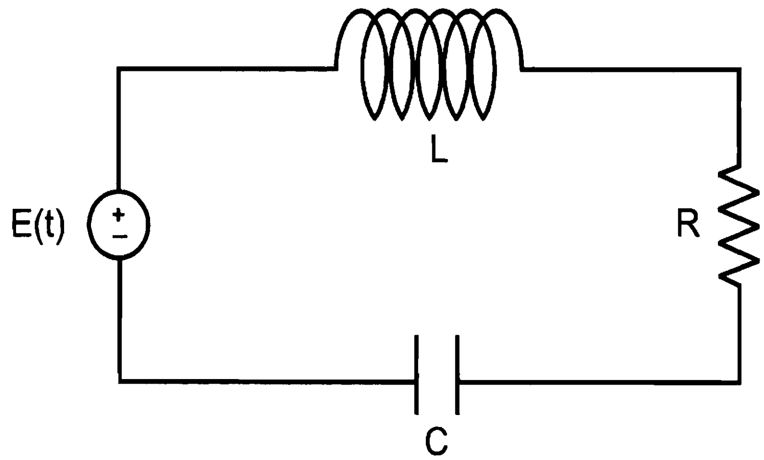


Figura 5.15: Circuito LRC

sustituyendo en (5.38) resulta la ecuación diferencial para la carga eléctrica en el condensador

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{5.40}$$

Note también que si primero derivamos con respecto a t en (5.38) obtenemos

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt},$$

y si luego sustituimos las expresiones (5.39), esto nos conduce a la ecuación diferencial de la corriente eléctrica

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE}{dt}. \tag{5.41}$$

Cabe además destacar la similitud entre las ecuaciones (5.40) y (5.32), lo cual permite resolver un problema de movimiento vibratorio en base al análisis del correspondiente circuito eléctrico y viceversa, identificando

- la carga q con la posición x,
- la inductancia L con la masa m,
- la resistencia R con la constante de amortiguamiento β,
- el recíproco de la capacitancia $1/C$ con la constante del resorte k,
- la fuerza electromotriz $E(t)$ con la fuerza externa $f(t)$ y
- la corriente eléctrica $i = dq/dt$ con la velocidad $v = dx/dt$.

Es claro entonces que podemos aplicar todos los resultados de la sección anterior al estudio de un circuito LRC en serie.

EJEMPLO 1. Un circuito en serie consta de un inductor de 0.25 H, una resistencia de 40 Ω, un capacitor de 4×10^{-4} F y una fuerza electromotriz dada por $E(t) = 5 \operatorname{sen} 100t$ V. Si la corriente inicial y la carga inicial en el capacitor son ambas cero, determine la carga en el capacitor y la corriente eléctrica del circuito para cualquier tiempo $t > 0$.

Solución. Sustituyendo los valores de $L = 0.25$ H, $R = 40$ Ω, $C = 4 \times 10^{-4}$ F y $E(t) = 5 \operatorname{sen} 100t$ V en la ecuación diferencial (5.40) obtenemos

$$(0.25)\frac{d^2q}{dt^2} + 40\frac{dq}{dt} + \frac{1}{4 \times 10^{-4}}q = 5 \operatorname{sen} 100t,$$

o bien

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10000q = 20 \operatorname{sen} 100t. \tag{5.42}$$

La ecuación auxiliar de (5.42) es $r^2 + 160r + 10000 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = -80 + 60i$ y $r_2 = -80 - 60i$. Luego

$$q_c(t) = e^{-80t}(c_1 \cos 60t + c_2 \operatorname{sen} 60t).$$

Adicionalmente, empleando el método de coeficienes indeterminados encontramos que una solución particular de (5.42) es

$$q_p(t) = -\frac{1}{800} \cos 100t.$$

En consecuencia, la solución general de (5.42) es

$$q(t) = e^{-80t}(c_1 \cos 60t + c_2 \operatorname{sen} 60t) - \frac{1}{800} \cos 100t.$$

De las condiciones iniciales $q(0) = 0$ y $q'(0) = 0$ se sigue que

$$c_1 - \frac{1}{800} = 0,$$

y

$$-80c_1 + 60c_2 = 0,$$

respectivamente. A partir de estas ecuaciones encontramos que

$$c_1 = \frac{1}{800} \qquad y \qquad c_2 = \frac{1}{600}.$$

Por consiguiente, la carga en el capacitor es

$$q(t) = e^{-80t}\left(\frac{1}{800} \cos 60t + \frac{1}{600} \operatorname{sen} 60t\right) - \frac{1}{800} \cos 100t,$$

y la corriente eléctrica viene dada por

$$i(t) = -\frac{5}{24}e^{-80t}\,\text{sen}\,60t + \frac{1}{8}\,\text{sen}\,100t.$$

EJERCICIOS 5.4

1. Un inductor de 1 H, una resistencia de 2 Ω, un condensador de 0.2 F y un generador con una fuerza electromotriz dada por $E(t) = 35$ Volts se conectan en serie. Si la corriente inicial es cero y la carga inicial en el condensador es de 1 Coulomb, determine la carga y la corriente para todo tiempo $t > 0$.

2. Se conecta un circuito en serie con un inductor de 0.5 H, una resistencia de 6 Ω, un condensador de 0.02 F y una fuente de voltaje alterno dado por $24\,\text{sen}\,10t$. Determine la carga y la corriente al tiempo t, si la carga en el condensador y la corriente en el circuito son cero al tiempo $t = 0$.

3. Un inductor de 4 H, una resistencia de 20 Ω, un capacitor de 0.008 F y un generador con una fuerza electromotriz dada por $E(t) = 500$ Volts se conectan en serie. Si inicialmente la carga y la corriente son ambas cero, obtenga.

   a) La carga y la corriente para todo tiempo.

   b) La carga y la corriente después de un tiempo largo.

4. Se conectan en serie un inductor de 1 H, una resistencia de 2 Ω, un capacitor de 0.5 F y una fuente de voltaje alterno dado por $E(t) = 20\cos 2t$ V. Si la carga inicial almacenada en el capacitor es de 1 Colulomb y la corriente inicial es igual a cero Amper, encuentre:

   a) La carga que contiene el capacitor en el tiempo $t > 0$.

   b) La corriente de estado estacionario y exprésela en la forma alternativa.

5. Un inductor de 0.4 H, un condensador de 0.001 F y un generador con una fuerza electromotriz de 20 V se conectan en serie. Si en $t = 0$ la carga y la corriente son cero, determine:

   a) La carga y la corriente para todo tiempo.

   b) Los valores máximos de la carga y la corriente.

6. Un circuito en serie contiene un inductor de 1 H,un capacitor de 10^{-4} F y una tensión $E(t) = 100\,\text{sen}\,50t$ Volts. Inicialmente la carga y la corriente son nulas, encuentre:

a) La carga y la corriente en un instante cualquiera.

b) Los instantes en los cuales la carga del capacitor es cero.

7. Un circuito en serie contiene un inductor de 5/3 H,una resistencia de 10 Ω, un condensador de 1/30 F y una bateria de 300 Volts. Si en $t = 0$ la carga y la corriente son cero, determine:

   a) La carga y la corriente en un instante cualquiera.

   b) La carga máxima en el condensador.

   c) Manteniendo fijos los valores de la inductancia y la capacitancia (ignorando la bateria) ¿para qué valores de la resistencia el circuito llega a estar: sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado?

8. Suponga que en un circuito LRC en serie $L = 1$ H y $C = 1/3$ F.

   a) Determine los valores de R para los cuales el circuito está subamortiguado.

   b) ¿Para qué valores de R se puede producir resonancia?

5.5 Otras Aplicaciones

Existen una gran cantidad de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. En esta sección presentaremos dos ejemplos más para ilustrar las posibilidades.

5.5.1 Vigas Horizontales

El problema consiste en determinar la flexión de una viga rectangular sometida a una carga. Inicialmente la viga es recta y su eje central coincide con el eje x, como se muestra en la figura 5.16. Posteriormente, dicho eje se ha desplazado debido a la acción de la carga (ver figura 5.17). Lo que se desea es obtener la ecuación de la curva punteada, llamada curva elástica, que nos da la deformación de la viga.

Por simplicidad consideraremos la curva elástica y un punto $P(x, y)$ sobre ella. De los cursos de Física se sabe que el momento M en el punto P es la suma algebraica de los momentos de las fuerzas externas que actúan sobre el segmento de la curva. Aquí supondremos que las fuerzas hacia arriba dan momentos positivos y las fuerzas hacia abajo dan momentos negativos. El momento está dado por

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2},$$

donde E es el módulo de elasticidad de la viga e I es el momento de inercia. Luego, si queremos conocer la ecuación de la curva elástica debemos resolver la ecuación diferencial.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M. \tag{5.43}$$

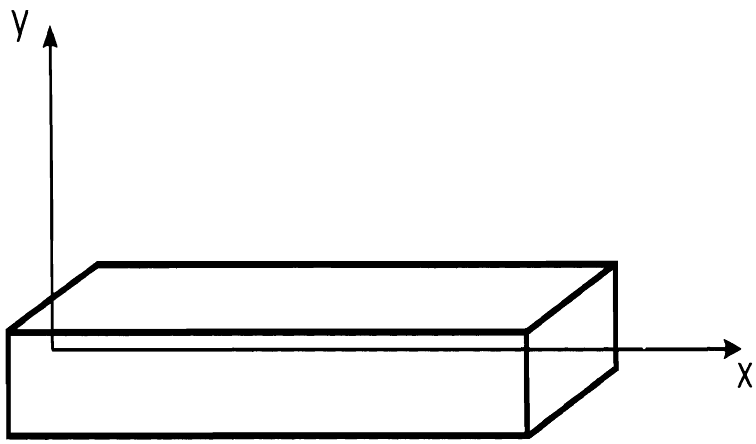


Figura 5.16: Viga horizontal

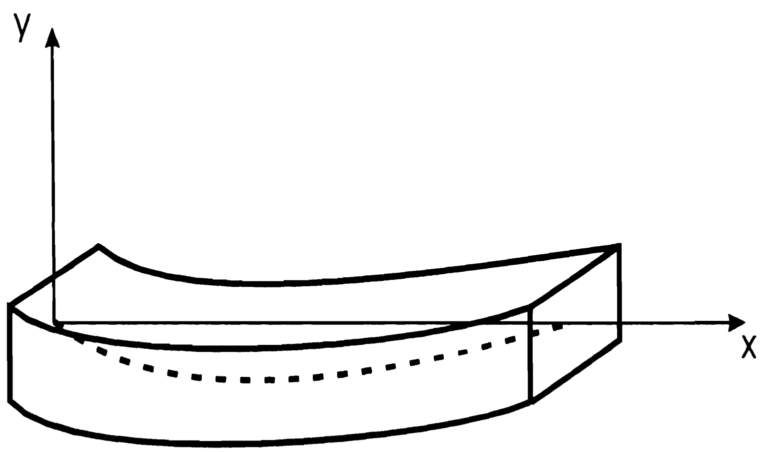


Figura 5.17: Aplicación de una carga a una viga

Veamos un caso concreto.

EJEMPLO. Una viga de 8 m de longitud está apoyada en dos columnas verticales. Si la viga tiene una carga uniforme de 500 kg por metro de longitud y una carga al centro de 5000 kg, ¿cuál es la curva elástica de la viga?

Solución. En la figura 5.18, las fuerzas que actúan sobre OP son

1) Una fuerza aplicada en O a x metros de P, dirigida hacia arriba e igual a la carga total, es decir $\frac{1}{2}(5000 + 8 \cdot 500)$.

2) Una fuerza de 500x dirigida hacia abajo que se supone concentrada en el punto medio de OP.

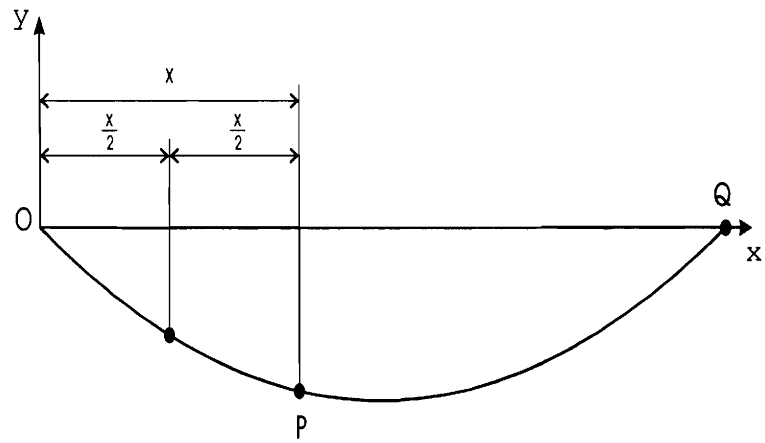


Figura 5.18: Viga del ejemplo

Así el momento flexionante (flector) en P es.

$$\begin{aligned} M &= F_1 d_1 - F_2 d_2 \\ &= \frac{1}{2}(5000 + 8 \cdot 500)x - 500x\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 4500x - 250x^2, \end{aligned}$$

y la ecuación diferencial (5.43), en este caso, tiene la forma

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = 4500x - 250x^2. \tag{5.44}$$

Podemos resolver (5.44) integrando directamente. Integrando una vez resulta

$$EI\frac{dy}{dx} = 2225x^2 - \frac{250}{3}x^3 + c_1,$$

y volviendo a integrar obtenemos

$$EIy = \frac{2225}{3}x^3 - \frac{125}{6}x^4 + c_1x + c_2.$$

En O, $x = y = 0$ de modo que $c_2 = 0$. En Q, $x = 8$, $y = 0$, por lo cual $c_1 = -36800$. Por lo tanto

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{2225}{3}x^3 - \frac{125}{6}x^4 - 36800x\right),$$

es la curva elástica de la viga.

5.5.2 El Péndulo Simple

Un péndulo simple consiste en una partícula de masa m suspendida de una cuerda (o un hilo inelástico) de largo l y de masa despreciable. Suponiendo que la cuerda está siempre tensa, que las oscilaciones son en un plano vertical y que las únicas fuerzas que actúan son el peso de la partícula y la tensión en la cuerda, deseamos hallar la ecuación del movimiento.

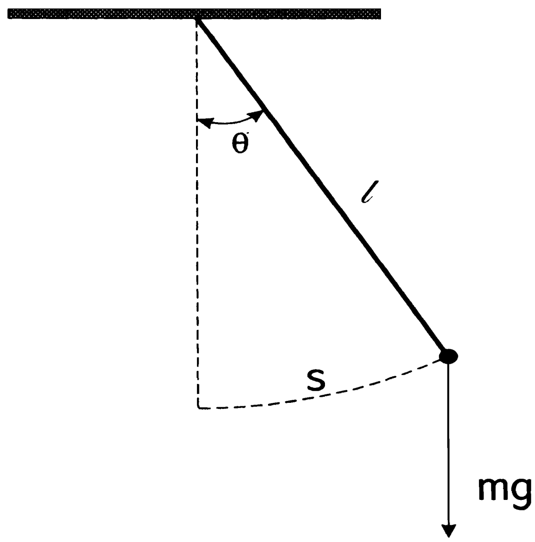


Figura 5.19: Péndulo Simple

Sean θ y s como en la figura 5.19. Se tiene que $s = l\theta$, de donde

$$\frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Descomponiendo el peso mg en dos componentes, una en la dirección de la tangente a la trayectoria y la otra perpendicular a ésta, vemos que la componente perpendicular se compensa por la tensión. La magnitud de la componente tangencial es $mg \operatorname{sen}\theta$. Ver figura 5.20.

Luego, de la segunda ley de Newton se sigue que

$$ma = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta.$$

Obtenemos así la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta,$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{5.45}$$

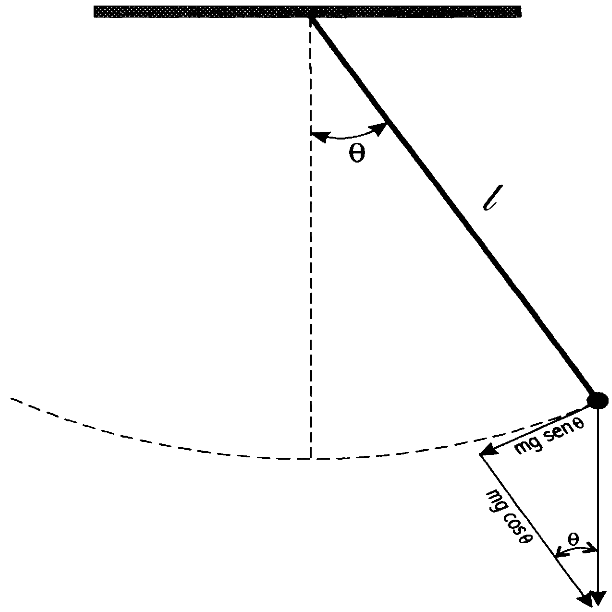


Figura 5.20: Péndulo Simple. Componentes del peso.

La ecuación (5.45) no es lineal y no puede resolverse en términos de funciones elementales. Sin embargo, para ángulos pequeños $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, que sustituyendo en (5.45) nos conduce a la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{5.46}$$

La solución general de (5.46) es claramente

$$\theta(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

que corresponde a un movimiento armónico simple con período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Conclusiones

El material que hemos expuesto permitirá que el lector resuelva algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. No hemos pretendido presentar todas las técnicas de solución conocidas o posibles. En lugar de ello, animamos ahora al estudiante a explorar las opciones que ofrecen las diversas calculadoras o paquetes computacionales existentes, útiles para este propósito.

Por supuesto, el usuario de tales recursos siempre deberá proceder con sumo cuidado, desde el almacenamiento de los datos hasta la interpretación de la solución que obtenga.

Por ejemplo, para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con la calculadora TI-92 la instrucción general es

deSolve(ecuación, variable independiente,variable dependiente),

la cual conduce a la solución general.

EJEMPLO 1. Resolver

$$xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3.$$

Solución. En este caso debemos teclear:

*deSolve(x*y^2y'=y^3-x^3,x,y),*

lo que da por resultado la expresión

$$y^3 = @\ 9 \cdot x^3 - 3x^3 \cdot \ln x,$$

donde @9 denota una constante. En general con $@n$, $n = 1, 2, \ldots, 25$, la calculadora indica constantes.

También pueden resolverse problemas de valor inicial empleando la calculadora. Ver páginas 120, 121 en [14]. Asimismo, la instrucción para resolver ecuaciones diferenciales de orden dos es análoga.

EJEMPLO 2. Resolver

$$y'' + 4y' + 4y = 10x^3e^{-2x}.$$

Solución. Tecleamos ahora:

deSolve(y"+4y'+4y=10x^3 e^(-2x),x,y),

obteniéndose

$$y = [\frac{x^5}{5} + @\ 10 \cdot x + @11]e^{-2 \cdot x}$$

Obsérvese que $(@\ 10 \cdot x + @11)e^{-2 \cdot x}$ es la solución complementaria.

Para este ejemplo es claro que la calculadora es una gran herramienta que ahorra tiempo y esfuerzo en el trabajo necesario para calcular la solución. Hasta el momento sólo se pueden resolver mediante ella ecuaciones diferenciales de orden 1 y 2.

Con el paquete computacional *Mathematica*, la solución de las ecuaciones de los ejemplos anteriores se obtiene mediante las instrucciones:

DSolve[x(y[x])^2*y'[x]==(y[x])^3 -x^3,y[x],x]*

y

*DSolve[y"[x]+4*y'[x]+4*y[x]==10*x^3*Exp[-2x],y[x],x],*

respectivamente.

Las posibilidades al utilizar *Mathematica* son mayores, ya que además pueden resolverse ecuaciones diferenciales y problemas con valores iniciales de orden superior. Véase [13].

En relación a las aplicaciones queremos destacar lo siguiente. Para un estudio interesante y completo de las curvas de persecución se recomienda [1]. El método de datación empleando Carbono 14 está en el libro del ganador del Premio Nobel de Química [7]. Una vasta colección de modelos de poblaciones se encuentra en [11]. El análisis de circuitos eléctricos y la deformación de vigas se pueden estudiar en [12] y [6], respectivamente.

Finalmente, el lector interesado en consultar otro texto para un primer curso de ecuaciones diferenciales puede ver [10], que contiene una buena cantidad de referencias históricas de ecuaciones diferenciales y de matemáticas en general, así como otros ejemplos atractivos de aplicaciones. Por otra parte en los textos [2], [3], [4], [5] y [9] encontrará una exposición completa y con diferentes grados de profundidad de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Respuestas a los problemas

Ejercicios 1.2, Página 33

1. Primer orden, y si es solución.
2. Primer orden, y no es solución.
3. Primer orden, y si es solución.
4. Primer orden, y si es solución.
5. Primer orden, y si es solución.
6. Primer orden, y si es solución.
7. Segundo orden, y si es solución.
8. Tercer orden, y si es solución.
9. Segundo orden, y no es solución.
10. Segundo orden, y si es solución.

Ejercicios 2.1, Página 43

1. $x = \sqrt{c\sqrt{t} - 1}$
2. $\dfrac{y^2}{2} + 2y + \ln y = \dfrac{x^3}{3} \ln x - \dfrac{x^3}{9} + c$
3. $\theta = \operatorname{arccot}(\operatorname{sen} t + c)$
4. $y = -\dfrac{1}{3} \ln\left(\dfrac{3}{2} e^{-2t} + c\right)$
5. $y = ce^{(x-1)e^{x+2} - x}$
6. $(y - 1)e^y = e^x - e^{-x} + c$
7. $y - 2\ln(y + 1) = x - 5\ln(x + 2) + c$

8. $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

9. $r = 4\sqrt{\dfrac{t^2-1}{3}}$

10. $\dfrac{1}{3}(y-1)^3 + \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) = c$

Ejercicios 2.2, Página 53

1. $y = x\ln\dfrac{c}{x}$

2. $y^2(2x^2-y^2) = cx^2$

3. $\operatorname{sen}\dfrac{y}{x} = cx$

4. $x^3\ln cx^3 = (x^2+y^2)^{3/2}$

5. $x^3+y^3 = cxy$

6. $xy+y^2 = 2x^3$

7. $y-2x+7 = c(x+y+1)^4$

8. $\ln(2x+3y+2) = 2y-x+c$

9. $y = x\arctan(\ln x+1)$

10. $\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} + \tan\dfrac{x}{y} = cy^{-2}$

Ejercicios 2.3, Página 62

1. $x^4y^2 - x^3y = c$

2. $y = \sqrt{2(c+x^2)e^{-2x}}$

3. $y = \dfrac{(c+x^3)}{(x-1)}$

4. No es exacta.

5. $x\operatorname{sen}y - y\cos x + \ln xy = c$

6. $y\operatorname{sen}t + t^2e^y + 2y = c$

7. $\ln xy + e^{xy} = e$

8. $y = \dfrac{6 - x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

9. $xy + e^{y/x} = c$

10. No es exacta.

Ejercicios 2.4, Página 70

1. $\mu(x) = x^{-2}, \qquad 4x^2 - 2y + xy^2 - cx = 0$

2. $\mu(x) = x^2, \qquad y = \arccos \dfrac{c - 4x^5}{5x^3}$

3. $\mu(y) = e^{-y}, \qquad xe^{-y} + \ln x - 3y = c$

4. $\mu(y) = y^2, \qquad 2x^2y^4 + x^2 + c = 0$

5. $\mu(y) = y^{-1}, \qquad x \ln xy + x^2 - y^2 = c$

6. $\mu(x) = x^3, \qquad x^6y^2 - x^4y^4 = c$

7. $\mu(x) = x^2, \qquad x \operatorname{sen} xy + x^3y^3 = c$

8. $\mu(y) = y^2, \qquad x \ln xy - y^3 = c$

9. $\mu(x) = x^{-3}, \qquad 2y = x^2(c + \cos 2y)$

10. $\mu(y) = \cos^{-3} y, \qquad x = (y + c)\cos^2 y$

Ejercicios 2.5, Página 73

1. $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{c}{x}$

2. $y = \dfrac{x^3 - 3x + c}{3(x^2 + x)}$

3. $y = -\dfrac{1}{3}(1 + x^2) + c(1 + x^2)^{-1/2}$

4. $y = x^3 \operatorname{sen} x$

5. $x = \dfrac{1}{4}y^{-2}e^{y}(2y^2 - 2y + 1) + cy^{-2}e^{-y}$

6. $x = y\ln y - \dfrac{y}{2} + \dfrac{c}{y}$

7. $y = \dfrac{(\operatorname{sen} x - x\cos x + c)}{x^2}$

8. $y = -\csc x$

9. $x = \dfrac{1}{2}e^y + ce^{-y}$

10. $y = 1 - 4e^{-\tan x}$

Ejercicios 2.6, Página 77

1. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{c-x}}$

2. $x^2 + y^2 = cx$

3. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{2} + cx}$

4. $y = (x + cx^2)^{-3}$

5. $y = \sqrt[3]{3 + ce^{-3x^2}}$

6. $x^2 = \dfrac{y}{2 + cy^5}$

7. $y = \dfrac{1}{c\sqrt{1-x^2} - 7}$

8. $y = \sqrt[4]{ce^{-8x^2} + 2}$

9. $y(1 + 2\ln x + cx^2) = 4$

10. $x(2 - y^2 + ce^{-y^2/2}) = 1$

Ejercicios 2.7, Página 80

1. $y^2 + 2y(1-x) - 4x^2 + 12x + c = 0$

2. $(1 + e^{5y})^2(1 + \operatorname{sen} 2x)^5 = c$

3. $y = \sqrt[3]{1 + ce^{3/x}}$

4. $y^7 + 7e^y \operatorname{sen} x = c$

5. $y^{-1} = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+c}{2\sqrt{1+x^2}}$

6. $e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = c$

7. $y = x \operatorname{arcsen}(c - \ln x)$

8. $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$

9. $y = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{2}\ln x + c$

10. $x^2 + 3y^2 + 4xy - 5x - y = c$

11. $cx\cos\dfrac{y}{x} = 1$

12. $(1+\cos x)(1+e^y) = c$

13. $(xe^x - e^x)\operatorname{sen} y + y\cos y e^x = c$

14. $y = \dfrac{x(1+cx)}{1-cx}$

15. $(\sqrt{y}+1)^2 + 2\ln(\sqrt{y}-1) + (\sqrt{x}-1)^2 + 2\ln(\sqrt{x}+1) = c$

16. $xe^{y/x} - ye^{y/x} + x\ln x + cx = 0$

17. $y = \dfrac{c}{(1+e^{-x})(1+e^x)}$

18. $y = -\dfrac{x^2}{3}\cos 3x + cx^2$

19. $4x = 6y + 3 + ce^{2y}$

20. $r = \dfrac{3+e^{4\theta}}{4e^{3\theta}}$

21. $y = x\ln(\ln cx)$

22. $3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = c$

23. $(x+y)^{-1} = -\dfrac{1}{2}e^{3x} + ce^x$. No se puede resolver con los métodos estudiados hasta ahora.

24. $y = \sqrt[3]{\dfrac{3}{3x+1+ce^{3x}}}$

25. $xy = -y\cos y + \operatorname{sen} y + c$

26. $cx - y + 3x \ln x - 4x \ln y = 0$

27. $x + 2\sqrt{y + 3x - 2} + 8 \ln(4 - \sqrt{y + 3x - 2}) = c$. No se puede resolver con los métodos estudiados hasta ahora.

28. $x^3 = -3e^{\frac{3}{2}y^2} \int e^{-\frac{3}{2}y^2}\, dy + ce^{\frac{3}{2}y^2}$

29. $y = c \ln \left(\dfrac{x}{y} - 2 \right)$

30. $(6x^2 y + y^2)e^x = c$

31. $\ln(x^2 + y^2) - \ln x = \arctan \dfrac{y}{x} + c$

32. $x \ln y + e^x + \operatorname{sen} y = c$

33. $x^3 y^3 = \dfrac{3}{2}\sqrt{1 + x^4} + c$

34. $y = \tan \left(\dfrac{cx - x^2 - 1}{x} \right)$

35. $y^3 = -3x^2 + cx^{3/2}$

36. $y^2 + xy + cx^3 = 0$

37. $3x^2 y^3 + y^4 = c$

38. $y = x \operatorname{sen} x + \dfrac{x}{\pi}$

39. $x^2 \cos y + x \operatorname{sen} y = c$

40. $2x^2 + cx^2 y^3 - 3y = 0$

41. $x^2 y + x + y^3 + cy = 0$

42. $y = ce^{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}}$

43. $x^{-1} = -y + 2 + ce^{-y^2/2}$

44. $y = \dfrac{c - x^3}{3(x - x^3)}$

45. $\sqrt{x^2 + y^2} + y = cx^2$

46. $y^4 + y^6 = c$

47. $\operatorname{sen} x - \cos x \sec y + c = 0$

48. $\ln[(3y-7)^2-(3x-2)(3y-7)+(3x-2)^2]-2\sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{6y-3x-12}{\sqrt{3}(3x-2)}\right)$

49. $y+2\ln|y-1|-x-5\ln|x-3|=c$

50. $\left(\dfrac{1}{2}x^2y^2-2xy^2+x^2-2x+2y^2+2\right)e^{2\arctan y}=c$

51. $\ln|1+v|+2\sqrt{v}-2\arctan\sqrt{v}=2\sqrt{s}+c$

52. $y=\ \text{arcsen}\,(c\,\text{sen}\,t)$

53. $y=\ln\left(\dfrac{1}{c-e^{t+3}}\right)$

54. $y^6-x\,\text{sen}\,x-y=-1$

55. $\ln\left(\dfrac{1+xy}{1-xy}\right)+x^2=c$

56. $4x^2y^4-x^4y^2=c$

57. $y-x-3\ln(x+y-1)=c$

58. $y=\dfrac{1}{4}(x^4-1)$

59. $\sqrt{xy}+xy^{3/2}-10\sqrt{y}+4=0$

60. $y=\sqrt[3]{x^3+cx^2}$

61. $\ln y=2\sqrt{\dfrac{x}{y}}+c$

62. $2x+e^{xy}-y^2=c$

63. $y=cx$

64. $y=\dfrac{c}{x}$

65. $y=\sqrt[3]{\text{sen}\,x+\dfrac{3\cos x}{x}-\dfrac{6\,\text{sen}\,x}{x^2}-\dfrac{6\cos x}{x^3}+\dfrac{c}{x^3}}$

66. $e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}+cy+1=0$

67. $y\,\text{sen}\,\dfrac{y}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

68. $x^2+2x^2y+y^2+2y=c$

69. $y^{2/3} = \dfrac{2}{9}x^5 + cx^2$

70. $y = \sqrt{(x^3 + c)^2 - 16}$

71. $y^2 = \dfrac{1}{2x^3 + cx^2}$

72. $y^6 - 6y + 3e^{x^2} = 3$

73. $y = \dfrac{\ln(c - x^2)}{2x}$

74. $y = \dfrac{6 - x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

75. $x^3(1 + \ln y) - y^2 = c$

76. $18y^{52} - 13x^3y^{54} + cx^{39} = 0$

77. $y = cx^2, \quad \text{con } c > 0$

78. $y = ce^{\frac{x}{y}}$

79. $x^2 + y^2 = cx$

80. $y = ce^{x/k^2} + k^2, \quad \text{con } k$ la distancia de F a t.

Ejercicios 2.8, Página 86

1. $\tan(x + y) - \sec(x + y) = x + c$

2. $x - y - \ln(c - x) - 5 = 0$

3. $y = \dfrac{2}{ce^x - e^{3x}} - x$

4. $x + y - \ln(c - \cos x) = 0$

5. $y = \tan(x + c) - x$

6. $x = \tan(x - y + 1) + c$

7. a) $\ln y + xy = \ln x + c$

   b) $\cos\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y}{x^2}\operatorname{sen}\dfrac{y}{x^2} = cx$

8. a) $y = c_1 \ln x + c_2$

b) $y = \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{c_1}{x} + c_2$

9. a) $y^2 = (x + c_1)^2 + c_2$

   b) $y = e^{\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2}$

Ejercicios 2.9, Página 88

1. $y = x + \left(e^{x^2/2}\displaystyle\int e^{-x^2/2}\,dx + ce^{x^2/2}\right)^{-1}$

2. $y = e^x + \dfrac{1}{1+ce^x}$

3. $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4x^3}{c - x^4}$

Ejercicios 2.10, Página 90

1. $y = cx - x^3$, la solución singular es $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$

2. $y = cx - \tan c$, la solución singular es $y = -\tan(\operatorname{arcsec}\sqrt{x}) + x\operatorname{arcsec}\sqrt{x}$

3. $y = cx + \ln c$, la solución singular es $y = \ln x - 1$

4. $y = cx - ac - c^2$, la solución singular es $y = \left(\dfrac{x+a}{2}\right)^2$

Ejercicios 3, Página 119

1. a) $y^2 = 2x + c$

   b) $x^2 + y^2 = cy$

2. a) $y^2 = 2\ln\cos x + 4$

   b) $y = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}x^2 + 21}$

3. a) $y(t) = 10e^{-0.0256\,t}$

   b) 8.8 g

4. a) $x(t) = 60e^{-0.07438\,t}$

   b) 41.37 mg

   c) 18.64 horas

5. 0.0433 % de la cantidad inicial.

6. $8y_0$, donde y_0 denota la cantidad inicial.

7. 2.7 horas

8. 218 animales

9. a) $P(t) = \dfrac{1000}{1000 - 999e^{-0.0018\,t}}$

   b) 1

10. a) $T(t) = 21 + 77e^{-0.0139113\,t}$

    b) 122.54 minutos

11. 12.425 minutos. $T(20) = 83.61°F$

12. $-30°F$

13. 46 segundos

14. 650 lb

15. a) $A(t) = \dfrac{3}{2}(120 - t) - 180\left(1 - \dfrac{t}{120}\right)^5$

    b) 2.8125 lb/gal

16. 10.85 años.

17. a) $x(t) = 0.04(1 - e^{-(6.25\times 10^{-5})\,t})$

    b) 48 minutos.

18. 986.58 lb

19. $A(t) = 300 - 260e^{-t/50}$

    $B(t) = 3(100 + t) + \dfrac{39000 + 260t}{100 + t}e^{-t/50} - \dfrac{68000}{100 + t}$

20. $i(t) = 0.6(1 - e^{-500t})$, 0.6 Amperes

21. $q(t) = \dfrac{1}{100}(1 - e^{-50t})$, $\quad i(t) = q'(t) = \dfrac{1}{2}e^{-50t}$

22. $i(t) = 4 - \dfrac{4}{(1 + 0.02t)^{10000}}$, $\quad i_{max} = 4$ Amperes

23. $i(t) = 20e^{-4t}$

24. $q(t) = \dfrac{3}{25}\,\text{sen}\,6t + \dfrac{4}{25}\cos 6t - \dfrac{4}{25}e^{-8t}$

$$i(t) = \frac{18}{25}\cos 6t - \frac{24}{25}\operatorname{sen} 6t + \frac{32}{25}e^{-8t}$$

25. $q(t) = e^{-3t} - e^{-6t}, \qquad q_{max} = q(\ln 2/3) = 0.25$ coulombs

26. $i(t) = \dfrac{E}{R} - \dfrac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad i\left(\dfrac{L\ln 2}{R}\right) = \dfrac{E}{2R}$

Ejercicios 4.3, Página 132

1. $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$
2. $y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$
3. $y(x) = c_1 x + c_2 x^2$
4. $y(x) = c_1 x^2 + \dfrac{c_2}{x^3}$
5. $y(x) = c_1 \operatorname{sen}\, \ln x + c_2 \cos \ln x$
6. $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3$
7. $y(x) = c_1 x + c_2 x^4$
8. $y(x) = c_1(x+1) + c_2 e^{2x}$
9. $y(x) = c_1 x + c_2 x^{-1}$
10. $y(x) = c_1 + c_2 x^{-2}$
11. $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$
12. $y(x) = c_1 x + c_2\left(\dfrac{x}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| - 1\right)$
13. $y(x) = c_1 x^{-1/2}\cos x + c_2 x^{-1/2}\operatorname{sen} x$
14. $y(x) = c_1 + c_2 \ln x$
15. $y(x) = c_1 x \ln x + c_2 x$
16. $y_1(x)$ no es solución de la ecuación diferencial.

Ejercicios 4.4, Página 139

1. $y = c_1 \cos\sqrt{5}\,x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{5}\,x$
2. $y = c_1 e^{-10x} + c_2 e^{x}$

3. $y = c_1 e^{2x} \cos 2\sqrt{2}\, x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} 2\sqrt{2}\, x$
4. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x/4}$
5. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$
6. $y = c_1 e^{(14-2\sqrt{43})x/4} + c_2 e^{(14+2\sqrt{43})x/4}$
7. $y = c_1 e^{9x} + c_2 x e^{9x}$
8. $y = c_1 e^{-x/8} \cos \dfrac{\sqrt{31}}{8} x + c_2 e^{-x/8} \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{31}}{8} x$
9. $y = e^{x} + 2e^{5x}$
10. $y = e^{-2x} \cos x + 2e^{-2x} \operatorname{sen} x$
11. $y = \cos 2x - \operatorname{sen} 2x$
12. $y = 4xe^{x} - e^{x}$

Ejercicios 4.5, Página 144

1. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x/2} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 e^{-x/2} \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$
2. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x$
3. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x}$
4. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + c_3 \cos 3x + c_4 \operatorname{sen} 3x$
5. $y = c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x + c_3 x \cos 4x + c_4 x \operatorname{sen} 4x$
6. $y = c_1 + c_2 e^{5x} + c_3 e^{-2x}$
7. $y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x + c_4 x \cos 2x + c_5 x \operatorname{sen} 2x$
8. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \cos \sqrt{2} x + c_3 e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2} x$
9. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} \cos 2x + c_3 e^{x} \operatorname{sen} 2x + c_4 x e^{x} \cos 2x + c_5 x e^{x} \operatorname{sen} 2x$
10. $y = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2} e^{-2x} - 3e^{-x}$
11. $y = -2e^{2x} + 5xe^{2x} - 5x^2 e^{2x}$
12. $y = 4 \cos x - \operatorname{sen} x - \cos 2x + \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

Ejercicios 4.7, Página 171

1. $(4D-3)(4D+3)$
2. $(D-8)(D-3)$
3. $D(D+6)^2$
4. $(D+1)(D-2)(D-4)$
5. $D(D+4)(D^2-4D+16)$
6. $(D^2+7)^2$
7. D^3
8. D^{11}
9. $D(D-4)$
10. $D^2(D-10)^2$
11. $D^3(D^2+81)$
12. $D^2(D^2+4)(D^2+49)$
13. $(D+1)(D-1)^3$
14. $D(D^2-6D+25)$
15. $(D^2+4D+13)(D^2-12D+45)$
16. $y = c_1e^{-7x} + c_2e^{-x} + 2e^x - e^{2x}$
17. $y = (c_1 + c_2x)e^x + 4\cos x - 5\operatorname{sen} x$
18. $y = (c_1\cos 4x + c_2\operatorname{sen} 4x)e^x - 1 + 4x + 17x^2$
19. $y = c_1 + c_2e^{-8x} - x + 4x^2$
20. $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + 4x^2e^{-2x}$
21. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-x} - 2xe^{-3x} + 6x - 3$
22. $y = (c_1 + c_2x)e^{-5x} + (x^2 + x^3)e^{-5x}$
23. $y = c_1 + c_2e^{-3x} + \dfrac{7}{3}x - (x + 6x^2)e^{-3x}$
24. $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + (20x - 5x^2)e^{-2x}$

25. $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}x$

26. $y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)e^x$

27. $y = c_1 e^{-(\sqrt{6}+2)x} + c_2 e^{(\sqrt{6}-2)x} - \frac{1}{25}(12 \operatorname{sen} 2x + 16 \cos 2x)$

28. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 1 + x(2 \operatorname{sen} x - 4 \cos x)$

29. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{sen} x + x \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

30. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x + \frac{1}{8} \cos 3x$

31. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{20} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{10} \cos 2x$

32. $y = (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x + x \operatorname{sen} x)e^{2x}$

33. $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + x + 1 + \frac{1}{25}(4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{8} \cos 2x$

34. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + 1 + \operatorname{sen} x + \frac{1}{25}(\cos 2x + 7 \operatorname{sen} 2x)$

35. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + 1 + x^3 e^{-3x} + 4 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$

36. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$

37. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x} + 2xe^{4x}$

38. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - e^x + 3$

39. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + (2x^3 - 3x^2 + 3x)e^x + 10$

40. $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + e^x \operatorname{sen} x$

41. $y = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x - 2x \cos 5x$

42. $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + (20x - 9) \operatorname{sen} x + (15x - 13) \cos x$

43. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$

44. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^x + (x^2 - 8x)e^x - x^4$

45. $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + 12x^2 - 4x^3 + x^4$

46. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + x^2 + x^4$

47. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x + \dfrac{1}{6}x^3e^x + x - 13$

48. $y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^x + \dfrac{1}{2}x^2e^x + \dfrac{1}{2}x^2$

49. $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{-x/2} + c_3\cos\dfrac{x}{2} + c_4\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} + 2xe^{x/2}$

50. $y_p = Axe^x + e^x(B\cos 2x + C\operatorname{sen} 2x) + xe^x(E\cos 2x + F\operatorname{sen} 2x)$

51. $y_p = Ax + (Bx + Cx^2)e^{3x} + (E + Fx + Gx^2)e^{-x}\cos x + (H + Ix + Jx^2)e^{-x}\operatorname{sen} x$

52. $y_p = A\cos x + B\operatorname{sen} x + C\cos 3x + E\operatorname{sen} 3x$

53. $y_p = (A + Bx)xe^x + (C\cos x + E\operatorname{sen} x)e^x + F\cos 2x + G\operatorname{sen} 2x$

54. $y_p = (A + Bx + Cx^2)\cos x + (E + Fx + Gx^2)\operatorname{sen} x + Hx^2 + Ix^3 + Jx^4 + Kx^5 + (Lx + Mx^2)e^x$

Ejercicios 4.8, Página 178

1. $y(x) = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - (\cos x)\ln|\sec x + \tan x|$

2. $y(x) = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - x\cos x + (\operatorname{sen} x)\ln|\operatorname{sen} x|$

3. $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + \dfrac{1}{2}[e^{-2x} + (e^{-x} - e^{-3x})\ln(1 + e^x)]$

4. $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x}$

5. $y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-3x} - e^{-3x}\ln x$

6. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \dfrac{1}{2}e^{2x}[x^2\arctan x - \arctan x - x\ln(1 + x^2)]$

7. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + \dfrac{1}{10}e^x\cos 2x - \dfrac{1}{5}e^x\operatorname{sen} 2x$

8. $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} - 2e^{-3x}\cos e^x - e^{-2x}\operatorname{sen} e^x$

9. $y(x) = (c_1 + c_2x)e^{3x} + \left(\dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{3}{4}\right)x^2e^{3x}$

10. $y(x) = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{4}x\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{4}x^2\cos x$

11. $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}\ln(x^2+1) + xe^{-2x}\arctan x$

12. $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{2}{3}x} + \dfrac{1}{9}e^{\frac{2}{3}x}(\sqrt{1-x^2} + x\,\mathrm{arcsen}\,x)$

13. $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-1} + \dfrac{1}{6}x^2\ln^2 x - \dfrac{1}{9}x^2\ln x$

14. $y(x) = c_1 x + c_2 x^{-1} - \dfrac{\ln x}{2x}$

15. $y(x) = c_1\cos\ln x + c_2\,\mathrm{sen}\,\ln x - (\cos\ln x)\ln(\sec\ln x + \tan\ln x)$

Ejercicios 5.1, Página 187

1. a) $x(t) = 0.1\cos t$

   b) $T = \pi/3$

2. a) $x(t) = -0.4\cos 4t + 0.3\,\mathrm{sen}\,4t$

   b) $x(t) = 0.5\,\mathrm{sen}\,(4t - 0.9273)$

   c) 16 oscilaciones.

3. a) $x(t) = 0.6\cos 5t - 0.8\,\mathrm{sen}\,5t$

   b) $x(t) = \mathrm{sen}\,(5t + 2.4981)$

   c) $t_n = \dfrac{n\pi}{5} - 0.4996,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

   d)

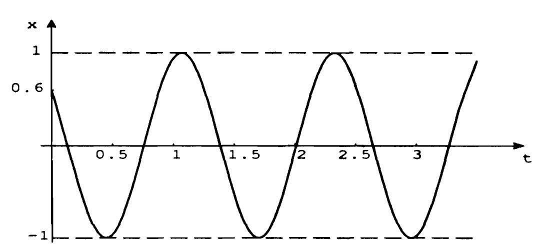


Figura 5.21: Gráfica de $x(t) = \mathrm{sen}\,(5t + 2.4981)$.

4. a) $x(t) = -\dfrac{1}{10}\cos 9t - \dfrac{2}{15}\,\text{sen}\, 9t$

   b) $x(t) = \dfrac{1}{6}\,\text{sen}\,(9t + 3.7851)$

   c)

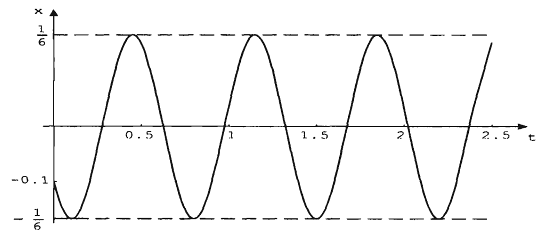


Figura 5.22: Gráfica de $x(t) = \frac{1}{6}\,\text{sen}\,(9t + 3.7851)$

   d) $t_n = n\pi/9 - 0.4206, \; n = 3, 5, 7, \ldots$

   e) $x(\pi/18) = -0.l333, \; x(\pi/9) = 0.1, \; x(\pi/3) = 0.1$

   f) $x'(\pi/18) = 0.9, \; x'(\pi/9) = 1.2, \; x'(\pi/3) = 1.2$, en dirección hacia arriba en los tres casos.

5. a) $x(t) = \frac{1}{4}\cos 8t$

   b) $T = \pi/4$

   c) 32 oscilaciones

   d) $t_n = (2n+1)\pi/16, \; n = 0, 1, 2, \ldots$

6. a) $x(t) = \dfrac{1}{4}\cos 8t + \dfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 8t$

   b) $x(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{4}\,\text{sen}\,(8t + 0.4636)$

   c) $t_n = n\pi/8 - 0.05795, n \in \mathbb{N}$

   d)

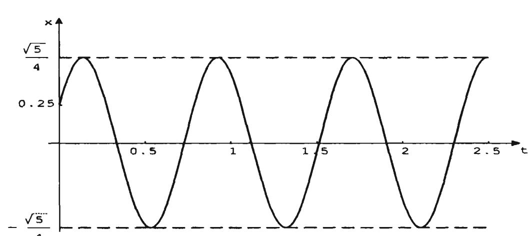


Figura 5.23: Gráfica de $x(t) = \frac{\sqrt{5}}{4}\,\text{sen}\,(8t + 0.4636)$

7. En la posición de equilibrio. $2\pi/\omega$.

8. a) $m = 1/4$ slug, $k = 1$ lb/ft. El movimiento inicia en un punto que está 2 ft abajo de la posición de equilibrio y con una velocidad inicial de 4 ft/s dirigida hacia arriba.

   b) $m = 1/25$ slug, $k = 25$ lb/ft. El movimiento inicia en un punto que está 0.1 ft arriba de la posición de equilibrio y con una velocidad inicial de 4 ft/s dirigida hacia abajo.

9. a) $x(t) = \frac{1}{3}\cos 8t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 8t$

   b) $x(t) = \frac{5}{12}\operatorname{sen}(8t + 2.2143)$

   c) $t_n = n\pi/4 - 0.2113,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\tilde{t}_n = n\pi/4 + 0.0505,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

10. a) $x(t) = \frac{1}{2}\cos 10t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10t$

    b) En $t = 1.34$ segundos, con una velocidad de -7.071 ft/s.

    c) $t_n = n\pi/5 - 0.1865,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ y $\tilde{t}_n = n\pi/5 + 0.02945,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

    d) $t_n^* = (2n+1)\frac{\pi}{20} - 0.23562,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

Ejercicios 5.2, Página 199

1. a) $x(t) = \left(\dfrac{1}{2} + 6t\right) e^{-8t}$

   b) Nunca pasa por la posición de equilibrio

   c) El desplazamiento máximo es de $\frac{3}{4}e^{-1/3}$ ft.

   d)

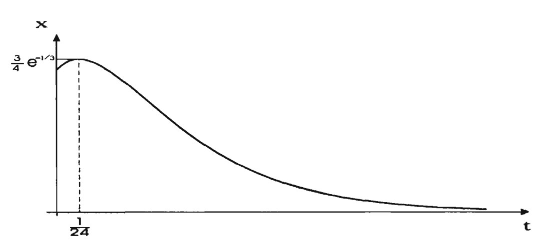


Figura 5.24: Gráfica de $x(t) = \left(\frac{1}{2} + 6t\right) e^{-8t}$

2. a) $x(t) = \dfrac{\sqrt{13}}{6} e^{-3t} \operatorname{sen}(2t + 2.5536), \qquad t_n = n\dfrac{\pi}{2} - 1.2768,\ n \geq 1, \text{e impar.}$

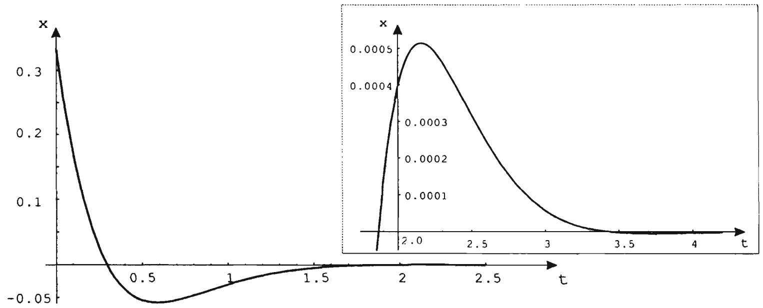


Figura 5.25: Gráfica de $x(t) = \frac{\sqrt{13}}{6} e^{-3t} \operatorname{sen}(2t + 2.5536)$

b) $x(t) = \dfrac{\sqrt{26}}{4} e^{-t} \operatorname{sen}(t + 3.3390), \qquad t_n = n\pi - 3.3390,\ n \geq 2, \text{y par.}$

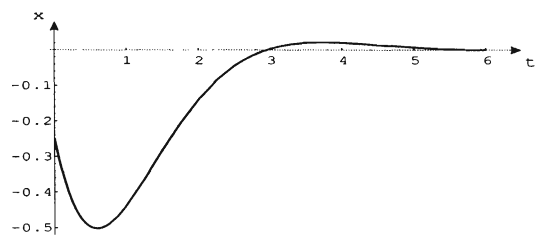


Figura 5.26: Gráfica de $x(t) = \frac{\sqrt{26}}{4} e^{-t} \operatorname{sen}(t + 3.3390)$

3. a) $x(t) = \dfrac{3}{2} e^{-2t} - \dfrac{5}{2} e^{-4t}$

b) $t = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{5}{3}$

c)

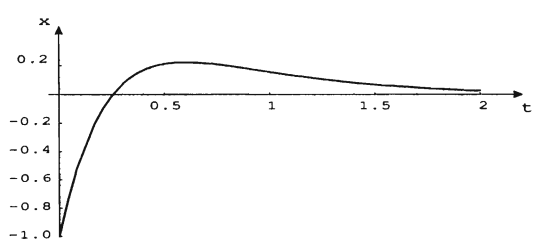


Figura 5.27: Gráfica de $x(t) = \frac{3}{2} e^{-2t} - \frac{5}{2} e^{-4t}$

4. a) $\beta > 2$
   b) $\beta = 2$
   c) $0 < \beta < 2$

5. $v_0 < -4$ ó $-\frac{1}{2} < v_0 < 0$

6. $m = 1/8$ slug, $k = 1/4$ lb/ft. El movimiento inicia en un punto que está 1 ft arriba de la posición de equilibrio y con una velocidad inicial de 1 ft/s dirigida hacia arriba. El medio ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea.

7. a) Movimiento sobreamortiguado o críticamente amortiguado. b) No.

Ejercicios 5.3, Página 207

1. a) $x(t) = -\dfrac{1}{6}e^{-4t} + \dfrac{2}{3}e^{-t} - \cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t$

   b)

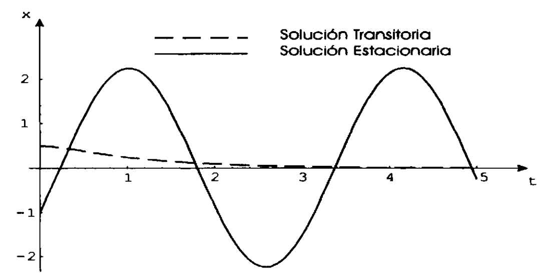


Figura 5.28: Soluciones transitoria y estacionaria del problema 1

   c)

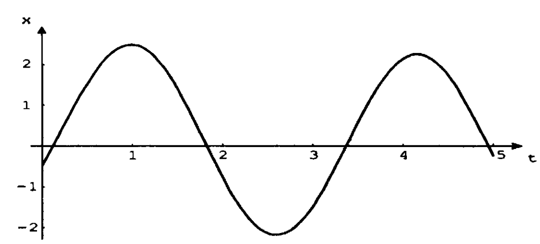


Figura 5.29: Gráfica de $x(t) = -\frac{1}{6}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t$

2. a) $x(t) = \dfrac{17}{48}e^{-t} - \dfrac{1}{48}e^{-5t} + \dfrac{1}{4}te^{-t}$

   b)

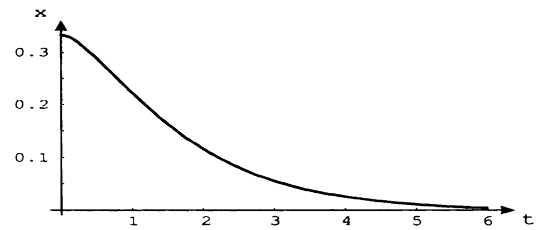


Figura 5.30: Gráfica de $x(t) = \frac{17}{48}e^{-t} - \frac{1}{48}e^{-5t} + \frac{1}{4}te^{-t}$

3. $x(t) = (\dfrac{11}{3} + \dfrac{58}{3}t)e^{-2t} - 4\cos 4t - 3\,\mathrm{sen}\,4t$

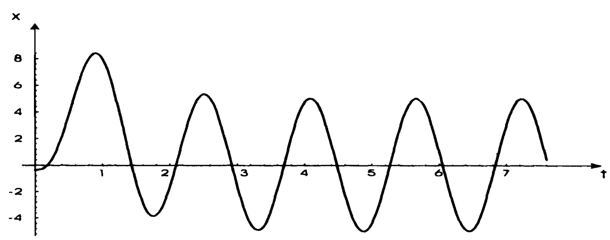


Figura 5.31: Gráfica de $x(t) = (\frac{11}{3} + \frac{58}{3}t)e^{-2t} - 4\cos 4t - 3\,\mathrm{sen}\,4t$

4. $x(t) = e^{-t}(\dfrac{1}{4}\cos 2t + \dfrac{25}{8}\,\mathrm{sen}\,2t) + \dfrac{5}{2}te^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t$

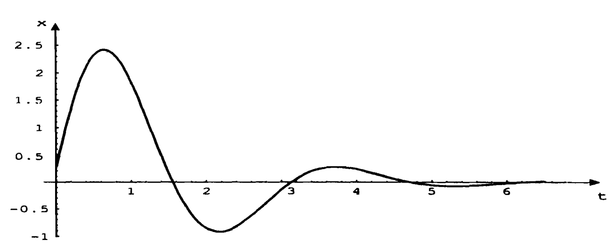


Figura 5.32: Gráfica de $x(t) = e^{-t}(\frac{1}{4}\cos 2t + \frac{25}{8}\,\mathrm{sen}\,2t) + \frac{5}{2}te^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t$

5. $x(t) = -\dfrac{1}{2}\cos 2t + \dfrac{13}{4}\,\text{sen}\,2t + 5t(\,\text{sen}\,2t - \dfrac{1}{2}\cos 2t)$

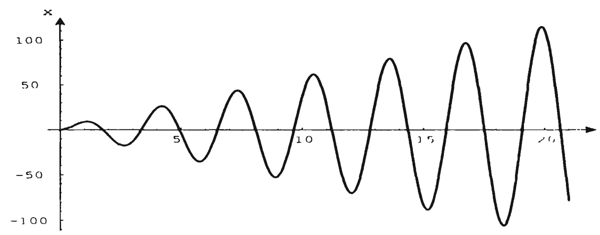


Figura 5.33: Gráfica de $x(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{13}{4}\,\text{sen}\,2t + 5t(\,\text{sen}\,2t - \frac{1}{2}\cos 2t)$

6. $x(t) = -\dfrac{3}{4}\cos\sqrt{5}t + \dfrac{11\sqrt{5}}{5}\,\text{sen}\,\sqrt{5}t + (\cos 2t - 2\,\text{sen}\,2t)e^{-t}$

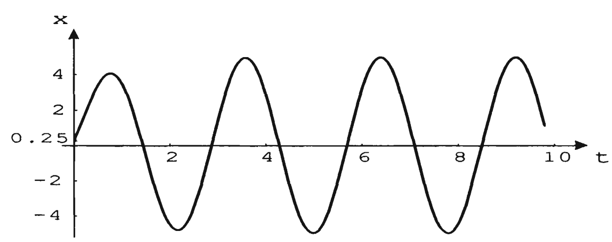


Figura 5.34: Gráfica de $x(t) = -\frac{3}{4}\cos\sqrt{5}t + \frac{11\sqrt{5}}{5}\,\text{sen}\,\sqrt{5}t + (\cos 2t - 2\,\text{sen}\,2t)e^{-t}$

7. a) La ecuación diferencial es $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x-h) - \beta\dfrac{dx}{dt}$, que en este caso se reduce a $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 4\cos 3t$; sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0,\ x'(0) = 0$.

   b) $x(t) = -\dfrac{2}{21}e^{-t} + \dfrac{8}{21}e^{-2t} - \dfrac{2}{7}\cos 3t + \dfrac{2}{9}\,\text{sen}\,3t$

   c)

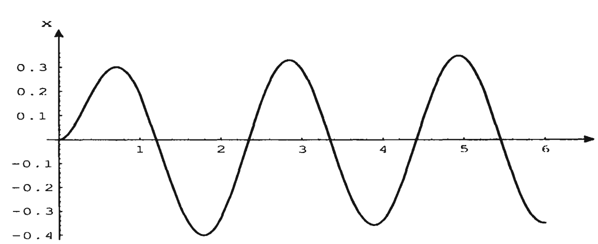


Figura 5.35: Gráfica de $x(t) = -\frac{2}{21}e^{-t} + \frac{8}{21}e^{-2t} - \frac{2}{7}\cos 3t + \frac{2}{9}\,\text{sen}\,3t$

8. $x(t) = \dfrac{4}{7}(\cos\sqrt{2}t - \cos 3t)$

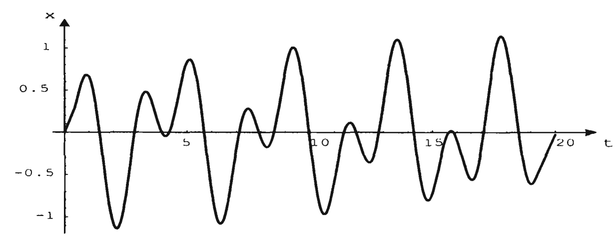


Figura 5.36: Gráfica de $x(t) = \frac{4}{7}(\cos\sqrt{2}t - \cos 3t)$

Ejercicios 5.4, Página 211

1. $q(t) = 7 - e^{-t}(6\cos 2t + 3\,\mathrm{sen}\, 2t)$

   $i(t) = 12e^{-t}\,\mathrm{sen}\, 2t$

2. $q(t) = e^{-6t}\left(\dfrac{2}{5}\cos 8t + \dfrac{3}{10}\,\mathrm{sen}\, 8t\right) - \dfrac{2}{5}\cos 10t$

   $i(t) = 4\,\mathrm{sen}\, 10t - 5e^{-6t}\,\mathrm{sen}\, 8t$

3. a) $q(t) = -e^{-\frac{5}{2}t}(4\cos 5t + 2\,\mathrm{sen}\, 5t) + 4$

   b) $i(t) = 25e^{-\frac{5}{2}t}\,\mathrm{sen}\, 5t$

   c) 4 Coul y 0 A.

4. a) $q(t) = e^{-t}(3\cos t - 5\,\mathrm{sen}\, t) - 2\cos 2t + 4\,\mathrm{sen}\, 2t$

   b) $i_e(t) = \sqrt{80}\,\mathrm{sen}\,(2t + 1.1071)$

5. a) $q(t) = -0.02\cos 50t + 0.02, \qquad i(t) = \mathrm{sen}\, 50t$

   b) 0.04 Coul y 1 A.

6. a) $q(t) = -\dfrac{1}{150}\,\mathrm{sen}\, 100t + \dfrac{1}{75}\,\mathrm{sen}\, 50t$

   b) $i(t) = -\dfrac{2}{3}\cos 100t + \dfrac{2}{3}\cos 50t$

   c) $t_n = \dfrac{n\pi}{50}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

7. a) $q(t) = -10e^{-3t}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t) + 10$
   b) $i(t) = 60e^{-3t} \operatorname{sen} 3t$
   c) $q_{max} = q(\pi/3) = 10.432$ Coul
   d) Está: sobreamortiguado si $R > \sqrt{200}$, críticamente amortiguado si $R = \sqrt{200}$ y subamortiguado si $0 < R < \sqrt{200}$.

8. a) $0 < R < 2\sqrt{3}$
   b) $0 < R < \sqrt{6}$

Bibliografía

[1] Bernhart A., Curves of Pursuit, *Scripta Mathematica,* Vol **23** (1957), 49-66.

[2] Birkhoff, G. y Rota, G. C., *Ordinary Differential Equations,* 3a. edición, Wiley, New York, 1978.

[3] Braun, M., *Differential equations and their applications,* 4a. edición, Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] Coddington, E. A. y Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations,* Mc Graw-Hill, New York, 1955.

[5] Elsgoltz, L., *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional,* 2a. edición, MIR, Moscú, 1977.

[6] Hibbeler, R., *Análisis Estructural,* 3a. edición, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1997.

[7] Libby, Willard, *Radiocarbon Dating,* 2a. edición, University of Chicago Press, 1955.

[8] Marsden, Jerrold E. y Tromba, Anthony J. , *Cálculo Vectorial* 3a. edición, Addisson-Wesley, 1991.

[9] Pontryaguín, L. S., *Ordinary differential equations,* Addisson-Wesley, 1962.

[10] Simmons, F., *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas,* 2a. edición, Mc Graw-Hill, México, 1995.

[11] Slenk, W., *Matemáticas Aplicadas a la Ecología,* CINVESTAV, México, 1987.

[12] Svoboda, D., *Circuitos Eléctricos,* 3a. edición, Alfa Omega, México, 2000.

[13] Wolfram, S., *Mathematica,* Addison-Wesley, 1991.

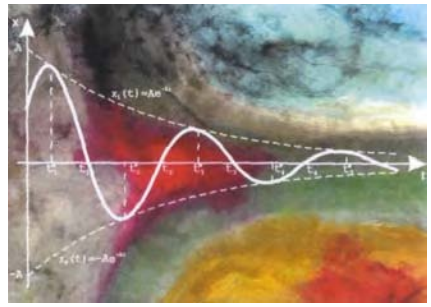
[14] Módulo TI-92 plus, *Suplemento para el manual del usuario de la TI-92.* 1998, Texas Instruments.

Índice

Ecuaciones diferenciales. Técnicas de solución y aplicaciónes se terminó de imprimir en el mes de abril de 2004, en los talleres de AGES, en la Ciudad de México. Se utilizaron los tipos Palatino y Carleton. Los interiores están impresos en papel kromos ahuesado de 90 g y la portada en Multiart de 250 g. Se tiraron 1,000 ejemplares. El cuidado de la edición estuvo a cargo de Silvia Guzmán Bofill y los autores.

DAVID ELIZARRARAZ MARTÍNEZ

Licenciado en Matemáticas, obtuvo el grado de Maestro en Matemáticas con la tesis "Análisis comparativo de distintos métodos para la resolución numérica de problemas de Stefan" y es doctor en Ciencias por la Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa. El título de su tesis de doctorado es "Métodos algebraicos para resolver ecuaciones funcionales lineales". Desde 1993 ejerce como profesor titular del departamento de Ciencias Básicas en la UAM, unidad Azcapotzalco; donde es miembro del Área de Análisis Matemático y sus Aplicaciones. Ha impartido el curso de Ecuaciones Diferenciales en varias ocasiones y ha publicado algunos artículos en revistas especializadas. Sus investigaciones se centran en ecuaciones diferenciales, Métodos operacionales y Transformadas integrales.



ISBN 970-31-0230-1

Este libro está diseñado para un curso trimestral de ecuaciones diferenciales ordinarias. Presentamos los teoremas y técnicas de solución que consideramos básicos en un estudio introductorio de esta importante disciplina de las Matemáticas. Aunque no hemos puesto énfasis en las demostraciones, proporcionamos una buena cantidad de ejercicios resueltos, de modo que un estudiante de Ingeniería podría obtener, mediante su análisis, un nivel satisfactorio en los diferentes métodos de solución de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones elementales más comunes. Los diferentes temas se exponen en forma clara y sencilla para su inmediata comprensión. En las primeras secciones los desarrollos se hacen de manera exhaustiva. Más adelante, lo que ya es conocido no se desarrolla completamente, sino que se dejan al lector los detalles que en ese momento ya está en capacidad de realizar. En consecuencia, el texto se puede utilizar para un curso tradicional o bien, para un curso en el Sistema de Aprendizaje Individualizado, en el que el alumno estudia por su propia cuenta.

CBI

Libros de texto y manuales de práctica

30 AÑOS
...transformando el diálogo por la razón
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA