Ecuaciones de recurrencia

Abraham Sánchez López
FCC/BUAP
Grupo MOVIS

Introducción, I

- Cuando se analiza la complejidad de un algoritmo recursivo, es frecuente que aparezcan funciones de costo también recursivas, llamadas *recurrencias*.
- En estas se separa el costo del caso base del costo del caso recursivo, y en este último se hace uso de la misma función para representar el costo de la llamada recursiva.
- Ejemplo:

$$T(n) = \begin{cases} k_1 & n = 0 \\ T(n-1) + k_2 & n > 0 \end{cases}$$

- Podemos conocer el orden de complejidad de *T*(*n*) calculando una fórmula explicita (en función de *n*) suya mediante sucesivas iteraciones (despliegues).
- Primero se sustituye *T* por la parte derecha de la ecuación tantas veces como sea necesario hasta encontrar una fórmula que dependa del número de iteraciones (o llamadas recursivas) *i*.

Introducción, II

- Después se obtiene el valor de *i* que hace que *T* desaparezca (caso base), y en la fórmula sustituimos *i* por ese valor, obteniendo la fórmula explícita *T** (que solo depende de *n*).
- Dependiendo de la dificultad del proceso , puede hacerse mediante una demostración de que efectivamente *T* = *T**; en ese caso, el orden de complejidad de *T* y *T** coinciden.
- Cuando la descomposición recursiva se obtiene restando una cantidad constante (es decir, el tamaño decrece en una cantidad constante), el caso básico tiene costo constante, y la preparación de las llamadas y la combinación de los resultados tiene costo polinómico, entonces la recurrencia es de la forma:

$$T(n) = \begin{cases} k_0 & 0 \le n < b \\ aT(n-b) + k_1 n^k & n \ge b \end{cases}$$

  donde a es el número de llamadas recursivas.

  Si en vez de una solución exacta estamos interesados solamente en su costo, podemos aplicar el teorema de la resta, que nos dice:

Introducción, III

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^{k+1}) & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n \text{ div } b}) & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

- Cuando la descomposición se obtiene dividiendo por una cantidad constante b ≥ 2, tenemos recurrencias de la forma

$$T(n) = \begin{cases} k_0 & \text{si } 0 \leq \text{n<b} \\ aT(n/b) + k_1 n^k & \text{si n} \geq b \end{cases}$$

- Como el argumento de *T* es un número natural, la división por *b* solamente tiene sentido cuando *n* es múltiplo de *b* (y debido a las sucesivas llamadas, cuando *n* es potencia de *b*), por lo que en general habría que utilizar la división entera (*n* div *b*) u otra aproximación.
- Sin embargo, para simplificar, cuando busquemos una solución exacta de *T* trabajaremos solamente con potencias y cuando nos interese el costo de *T*(*n*) aplicaremos el teorema de la división, según el cual para todo *n*

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } a < b^k \\ \Theta(n^k \log n) & \text{si } a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^k \end{cases}$$

Resolución de ecuaciones en recurrencia

- Resolver este tipo de ecuaciones consiste en encontrar una expresión no recursiva de *T*, y por lo general no es una labor sencilla.
- Veremos a continuación cómo se pueden resolver algunos tipos concretos de ecuaciones en recurrencia, que son las que se dan con más frecuencia al estudiar el tiempo de ejecución de los algoritmos desarrollados según las diferentes técnicas.
- Veremos inicialmente las recurrencias homogéneas.
- Estas son de la forma:

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \ldots + a_k T(n-k) = 0$$

  donde los coeficientes a_i son números reales, y k es un número natural entre 1 y n.
- Para resolverlas, debemos buscar soluciones que sean combinaciones de funciones exponenciales de la forma:

$$T(n) = c_1 p_1(n) r_1^n + c_2 p_2(n) r_2^n + \ldots + c_k p_k(n) r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i p_i(n) r_i^n$$

Recurrencias homogéneas, I

donde los valores c_1, c_2, …, c_n y r_1, r_2, …, r_n son números reales, y $p_1(n)$,…, $p_k(n)$ son polinomios en n con coeficientes reales.

- Para resolverlas, se realiza el cambio $x^n = T(n)$, con lo cual se obtiene la ecuación característica asociada:

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_k = 0$$

- Llamaremos r_1, r_2, …, r_n a sus raíces, ya sean reales o complejas.
- Dependiendo del orden de multiplicidad de tales raíces, pueden darse los siguientes casos.

Raíces distintas

- Si todas las raíces de la ecuación característica son distintas, $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$, entonces la solución de la ecuación en recurrencia viene dada por la siguiente expresión

$$T(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \dots + c_k r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$$

donde los coeficientes c_i se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Recurrencias homogéneas, II

Raíces con multiplicidad mayor que 1

- Supongamos que alguna de las raíces (por ejemplo r_1) tiene multiplicidad $m > 1$. Entonces la ecuación característica puede escribirse en la forma

$$(x-r_1)^m (x-r_2)\ldots(x-r_{k-m+1})$$

  en cuyo caso la solución de la ecuación en recurrencia viene dada por la expresión:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} c_i n^{i-1} r_1^n + \sum_{i=m+1}^{k} c_i r_{i-m+1}^n$$

  donde los coeficientes c_i se determinan a partir de las condiciones iniciales.

- De hecho, este caso a menudo se generaliza de la siguiente forma.
- Si r_1, r_2, …, r_k son las raíces de la ecuación característica de una ecuación en recurrencia homogénea, cada una de multiplicidad m_i, es decir, si la ecuación característica puede expresarse como:

$$(x-r_1)^{m_1} (x-r_2)^{m_2} \ldots (x-r_k)^{m_k} = 0$$

Recurrencias homogéneas, III

entonces la solución a la ecuación en recurrencia viene dada por la siguiente expresión:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m_1} c_{1i} n^{i-1} r_1^n + \sum_{i=1}^{m_2} c_{2i} n^{i-1} r_2^n + \ldots + \sum_{i=1}^{m_k} c_{ki} n^{i-1} r_k^n$$

- Ejemplos:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2),\ n \geq 2$$

$$T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-2),\ n \geq 2$$

Recurrencias no homogéneas, I

- Consideremos una ecuación de la forma:

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + ... + a_k T(n-k) = b^n p(n)$$

  donde los coeficientes a_i y b son números reales, y $p(n)$ es un polinomio en n de grado d.
- Una primera idea para resolver la ecuación, es manipularla para convertirla en homogénea, veremos más adelante un ejemplo práctico.
- Realizar los cambios, es a menudo tedioso.
- Afortunadamente, para este tipo de ecuaciones también existe una fórmula general para resolverlas, buscando sus soluciones entre las funciones que son combinaciones lineales de exponenciales.
- En este caso, se demuestra que la ecuación característica es de la forma:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + ... + a_k)(x-b)^{d+1} = 0$$

  lo que permite resolver el problema de forma similar a los casos anteriores.

Recurrencias no homogéneas, II

- Generalizando este proceso, supongamos ahora una ecuación de la forma: $$a_0T(n) + a_1T(n-1) + \ldots + a_kT(n-k) = b_1^n p_1(n) + \ldots + b_s^n p_s(n)$$

  donde los coeficientes a_i y b_i son números reales y $p_j(n)$ son polinomios en n de grado d_j.
- En este caso también existe una forma general de la solución, en donde se demuestra que la ecuación característica es:

$$(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k)(x-b_1)^{d_1+1}(x-b_2)^{d_2+1}\ldots(x-b_s)^{d_s+1} = 0$$

- Ejemplos

  * $T(n) - 2T(n-1) = 3^n$, para $n \geq 2$, con las condiciones iniciales T(0)=0 y T(1)=1.

  * $T(n)=2T(n-1) + n$

  * $T(n) = 2T(n-1) + n + 2^n$, $n \geq 1$, con la condición inicial $T(0) = 1$.

Cambio de variable

- Esta técnica se aplica cuando n es potencia de un número real a, es decir, $n = a^k$.
- Sea la ecuación $T(n) = 4T(n/2) + n$, ($a = 2$)donde n es una potencia de 2 ($n > 3$), $T(1)=1$ y $T(2)=6$.
- Si $n = 2^k$, la ecuación se puede escribir como: $T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$.
- Si se realiza el cambio de variable $t_k = T(2^k)$, se obtiene la ecuación:

$$t_k = 4t_{k-1} + 2^k$$

- Recordemos que corresponde a una de las ecuaciones estudiadas en los ejercicios, cuya solución esta dada por la expresión

$$t_k = c_1(2^k)^2 + c_2 2^k$$

- Deshaciendo el cambio que realizamos al inicio, se obtiene lo siguiente

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$$

- Si calculamos las constantes a partir de las condiciones iniciales.

$$T(n) = 2n^2 – n \in O(n^2)$$

Recurrencias no lineales, I

- En este caso, la ecuación que relaciona $T(n)$ con el resto de los términos no es lineal.
- Para resolverla, se intenta convertirla en una ecuación lineal como las que se han solucionado en los ejercicios.
- A continuación se tiene un ejemplo, sea la ecuación $T(n) = nT^2(n/2)$ para n potencia de, $n > 1$, con la condición inicial T(1)=1/3.
- Consideremos $t_k = T(2^k)$, la ecuación quedaría como

$$t_k = T(2^k) = 2^k T^2(2^{k-1}) = 2^k\, t_{k-1}^2$$

que no corresponde a ninguno de los tipos resueltos anteriormente.
- Necesitamos hacer un cambio más para transformar la ecuación.
- Si aplicamos logaritmos a ambos lados y con el cambio $u_k = \log t_k$, se obtiene

$$u_k - 2u_{k-1} = k$$

- Ecuación en recurrencia no homogénea cuya ecuación característica asociada es

$$u_k = c_1 2^k + c_2 + c_3 k$$

Recurrencias no lineales, II

- Primero es necesario deshacer los cambios hechos, Primero u_k = log t_k

$$t_k = 2^{c_1 2^k + c_2 + c_3 k}$$

- y después $t_k = T(2^k)$,

$$T(n) = 2^{c_1 n + c_2 + c_3 \log n}$$

- Para calcular las constantes, es necesario tener las condiciones iniciales.
- Cómo sólo contamos con una, y tenemos tres incógnitas, podemos usar la ecuación en recurrencia original para obtener las restantes:

$$T(2) = 2T^2(1) = 2/9$$

$$T(4) = 4T^2(2) = 16/81$$

- Con esto, llegamos a que c_1 = log(4/3) = 2 – log 3, c_2 = -2, c_3 = -1 y por lo tanto:

$$T(n) = \frac{2^{2n}}{4n3^n}$$

Recurrencia con historia, I

- Se trata de una recurrencia, en cuyo caso recursivo aparece la suma de todos los valores anteriores $T(1)$, $T(2)$, …, $T(n\text{-}1)$ de la misma función.
- Eliminaremos primero esa dependencia, buscando una recurrencia equivalente en cuyo caso recursivo solamente aparezca el valor inmediatamente anterior a $T(n\text{-}1)$.
- Ejemplo ilustrativo. Hallar la solución exacta de la recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + n^2 & n \geq 2 \end{cases}$$

- Para esto, restamos $T(n\text{-}1)$ de $T(n)$ como sigue. Para $n \geq 3$

$$T(n) - T(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + n^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-2} T(i) + (n-1)^2 \right)$$

Recurrencia con historia, II

$$T(n)-T(n-1)=\sum_{i=1}^{n-2}T(i)+T(n-1)+n^2-\sum_{i=1}^{n-2}T(i)-(n^2-2n+1)$$
$$=T(n-1)+2n-1$$

- Despejando T(k) de la igualdad anterior, tenemos para $n \geq 3$,

$$T(n) = 2T(n-1)+2n-1$$

- Si $n = 2$, la definición original de la recurrencia $T(n)$ da

$$T(2)=\sum_{i=1}^{2-1}T(i)+2^2=T(1)+4=1+4=5$$

y también

$$2T(n-1) + 2n-1 = 2T(1) + 2\cdot 2 - 1= 2 + 4 - 1 = 5$$

por lo que la fórmula anterior vale para todo $n \geq 2$. Así la recurrencia equivalente es

$$T(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 2T(n-1)+2n-1 & n\geq 2 \end{cases}$$